الدكتور
مؤيد عبد الحسين الفضل

الاساليب الكميه

نماذج خطية وتطبيقاتها في تخطيط الإنتاج



الأساليب الكمية

نماذج خطية وتطبيقاتها في تخطيط الإنتاج

الطبعة الأولى 1425 هـ - 2004

رقم الإيداع: 2004/4/749
رقم الإجازة: 2004/4/820
ردمك" ISBN 9957-02-145-1

دار مجدلاوي للنشر والتوزيع
عمان – الرمز البريدي: 11118- الأردن
ص. ب: 184257- تلفاكس: 461606 – 4622884
WWW.majdalawibooks.com
E-mail: customer@majdalawibooks.com



الأساليب الكمية

نماذج خطية وتطبيقاتها في تخطيط الإنتاج

تأليف

د. مؤيد عبد الحسين الفضل



الإهداء

من الأردن الحبيب ...

إلى الوطن الغالي ...

العــــــــــراق...

بسم الـلـه الرحمن الرحيم

﴿يمعشر الجن والإنس إن استطعتم أن تنفذوا من أقطار السماوات والأرض فانفذوا لا تنفذون إلا بسلطان﴾

صدق الـلـه العظيم

[الرحمن: الآية 32]

* * *

﴿أفمن يمشي مكبا على وجهه أهدى أمّن يمشي سويا على صراط مستقيمٍ﴾

صدق الـلـه العظيم

[الملك: الآية 22]

المحتويات

الفصل الأول

مفاهيم نظرية في تخطيط الإنتاج والبرمجة الخطية

الفصل الثاني

معالجة مشاكل تخطيط الإنتاج باستخدام الطريقة البيانية

الفصل الثالث

أسلوب السمبلكس وتطبيقاته العملية

الفصل الرابــع

الحالات المختلفة للبرمجة الخطية

الفصل الخامس

تحليل حساسية النموذج الرياضي

الفصل السادس

نماذج النقـل

الفصل السابع

نموذج التخصيص

المقدمة

إن المنهج الكمي في إدارة الأعمال اتسع وتنامى استجابتاً للتطورات التي حصلت في جوانب الحياة المختلفة، ومن أهمها تقنيات الحاسوب والبرامجيات الجاهزة، بحيث أصبحت الكتب والطروحات العلمية لهكذا نوع من الاختصاصات غنية بما تتناوله من أساليب وأفكار علمية. حيث من المعلوم أن هذا المنهج ينطوي على أساليب وأدوات كمية مختلفة، يأتي في مقدمتها البرمجة الخطية Linear Programming، حيث يذهب البعض إلى اعتبارها القاعدة الأساسية للمنهج الكمي. إن دراسة هذا الأسلوب في إطار بحوث العمليات قد لا يسمح الأمر إلى بيان دور وفاعلية هذا الأسلوب في معالجة مشاكل دقيقة ومتشعبة في الواقع العملي. وتأسيساً على ما تقدم جاءت فكرة التركيز على البرمجة الخطية والنماذج ذات الصفة الخطية المشتقة منها وذلك ضمن المجال الإداري وبالتحديد ضمن إدارة الإنتاج ولم يتحدد اهتمامنا بإطار الاشتقاق الرياضي المطلق التي قد يجدها القارئ في بعض المؤلفات، حيث اتجهنا نحو إبراز معالجات لمشاكل تواجه متخذ القرار في مجال إدارة الأعمال من خلال عرض فاعلية وكفاءة النماذج الخطية مع التأكيد على المشاكل ذات الطابع الإنتاجي بالتحديد مشكلة تخطيط الإنتاج.

إن المادة العلمية في هذا الكتاب تقع في إطار ما يسمى بالأساليب الكمية الأساسية وهي مدخل بحوث العمليات وذلك من خلال التصدي للنماذج المحددة والخطية الأساسية في المجال الكمي. وقد حاولنا قدر الإمكان بيان الجانب التقني والرياضي للبرمجة الخطية وبعبارة أخرى تم تقديم وعرض نماذج رياضية خطية مختلفة مع بيان تطبيقاتها في الواقع العملي، وبالتحديد في مجال تخطيط الإنتاج.

إضافة لما تقدم، تم التركيز في بعض الفقرات والمباحث على عناوين لأنواع المشاكل التقليدية التي تواجه متخذ القرار عند تصميم خطط الإنتاج، وذلك مثل مشكلة تحديد كمية ونوعية الإنتاج (هيكل المنتجات) ومشكلة تحديد مزيج المكونات (التغذية) ومشكلة اختيار بدائل الإنتاج (القطع)، أي أن لكل واحدة من هذه المشاكل صيغة رياضية خاصة بها وهي معروفة لدى كافة المهتمين بالمنهج الكمي.

إن محتويات كتابنا هذا تصلح كمنهج لدراسة الأساليب الكمية في الأقسام الإدارية والمحاسبية من كليات الاقتصاد، وفي قسم الرياضيات في كلية العلوم والتربية. وقد جاءت هذه المادة العلمية في سبعة فصول رئيسية، خصص الأول منها لدراسة مفاهيم نظرية في مجال تخطيط الإنتاج والبرمجة الخطية. أما الفصل الثاني فقد خصص لدراسة الطريقة البيانية وأهميتها في عرض المشاكل المختلفة في تخطيط الإنتاج ومنها ما تم ذكره أعلاه. أسلوب السمبلكس وتطبيقاته العملية في المجال نفسه تم توضيحه في الفصل الثالث.

الفصل الرابع تم تخصيصه لدراسة الحالات المختلفة للبرمجة الخطية بما في ذلك البرمجة بأعداد صحيحة والنموذج المقابل والحالات الخاصة أو الشاذة وكذلك دالة الهدف المزدوجة. في الفصل الخامس تم دراسة تحليل حساسية النموذج الرياضي مع بيان كافة المؤشرات والتحليلات المهمة لهذا الأسلوب وأهميته في مجال تخطيط أو ترشيد خطة الإنتاج. نموذج النقل بأنواعه تم دراسته في الفصل السادس. الفصل الأخير في كتابنا خصص لدراسة نموذج التخصيص مع بيان أهم تطبيقاته في تخطيط الإنتاج.

إن المادة العلمية في كتابنا هذا، جاءت بشكل يهدف إلى تعزيز ما ورد في مؤلفاتنا السابقة في مجال بحوث العمليات والأساليب الكمية وترشيد القرارات من جهة، ومن جهة أخرى جاء لتعزيز الفكر الإداري في مجال إدارة الإنتاج والعمليات من خلال توظيف أدوات كمية تساعد متخذ القرار في ترشيد خطط الإنتاج الحالية أو وضع تصورات وأفكار لخطط إنتاج جديدة يتم من خلالها التعرف على تلك المنتجات التي تتفوق على غيرها في تحقيق أقصى الأرباح أو أقل التكاليف مع تحقيق الاستغلال الأمثل لمستلزمات الإنتاج الأساسية.

وأخيراً أستميح القارئ الكريم العذر عما قد يجده من هفوات غير مقصودة والعصمة لله وحده، وفوق كل ذو علم عليم.

المؤلف

●●●

الفصل الأول

مفاهيم نظرية في تخطيط الإنتاج

والبرمجة الخطية

1.1 تخطيط الإنتـــاج

2.1 البرمجة الخطيــة

1.2.1 المفهوم العام للبرمجة الخطيـــــــــــــــــــــــة

2.2.1 النموذج العام للبرمجة الخطيـــــــــــــــــــــة

3.2.1 افتراضات النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية

4.2.1 طرق حل نماذج البرمجة الخطيـــــــــــــــــة

5.2.1 النموذج الأولي والنمـــــــــــوذج المقابـــــــل

6.2.1 مفهوم النموذج الأولي ومتطلباته الأساسيـــــــة

7.2.1 قواعد تحويل النموذج الأولي إلى النموذج الثنائي (المقابل)

8.2.1 أساليب معالجة النموذج الأولي والثنائـــــــي (المقابل)

أسئلة وتمارين حول الفصل الأول

●●●

الفصل الأول

مفاهيم نظرية في تخطيط الإنتاج

والبرمجة الخطية

في البداية سوف يتم تناول موضوع تخطيط الإنتاج باعتباره الحقل أو الأرضية التي يتم فيها تطبيق الأدوات والنماذج الرياضية الخاصة بالبرمجة الخطية.

1.1 تخطيط الإنتاج *Production Planning*

وهو أحد المهام الأساسية لإدارة الإنتاج والعمليات في أية منشأة أو منظمة إنتاجية، ويذهب المتخصصين في العلوم الإدارية إلى تعريفه بأنه عبارة عن عملية تحديد واقتناء وتوافق جميع التسهيلات الضرورية للعمليات الإنتاجية المستقبلية، ويشير البعض إلى أنه وظيفة إدارية تهتم بتخطيط الوسائل المادية في المنشأة لإنتاج السلع والخدمات المطلوبة. وبشكل عام يرد في معظم أدبيات إدارة الإنتاج والعمليات مفهوم لعملية تخطيط الإنتاج باعتبارها توقع مستقبلي لما سيكون عليه الحال بالنسبة لكمية ونوعية الإنتاج وما هي المستلزمات المطلوبة لذلك. واستناداً لما تقدم فإن بالإمكان استباط خمسة أركان أساسية تتعلق بمفهوم وأهمية تخطيط الإنتاج[1]:

1- تحديد كمية ونوعية الإنتاج (أو الخدمات) المطلوب طرحها في الفترة القادمة (سواء كانت هذه الفترة قصيرة أو متوسطة أو طويلة الأمد) وتوفير المستلزمات الأساسية اللازمة لذلك مع ضمان استغلالها بشكل علمي وصحيح.

(1) يرد في هذا الموضوع تحليلات وتفسيرات كثيرة وذلك حسب الزاوية التي ينظر منها إلى مفهوم تخطيط الإنتاج. لمزيد من التفاصيل راجع كتابنا مع الدكتور حاكم محسن محمد الموسوم "إدارة الإنتاج والعمليات" إصدار مؤسسة زهران للنشر والتوزيع عام 2004. ويمكن وبنفس المفهوم يراجع كتاب الدكتور عبد المنعم زمزير الموسوم "إدارة الإنتاج" إصدار نفس المؤسسة عام 1999.

2- تحديد الكيفية التي بموجبها يتم إنجاز المهام الإنتاجية، وذلك من خلال تحليل العمليات ووضع تعليمات وافية لطرائق التشغيل.
3- تحديد مواقع العمل والكيفية التي بموجبها تنتقل أجزاء المنتوج بين هذه المواقع لغاية إتمام عمليات الإنتاج مع الأخذ بنظر الاعتبار تتابع العمليات الإنتاجية على أساس خط محدد واضح بين المواقع المذكورة تم تحديده وفق أسس علمية مدروسة.
4- تحديد وقت إنجاز العمل والكيفية التي بموجبها يتم تحقيق الاستغلال المناسب للوقت المتاح لتشغيل الحقائق والمعدات.
5- تحديد مسؤولية متخذي القرار عن هذه المهام وتسميتهم على أساس الاختصاصات الملائمة وذلك عن طريق وضع هيكل تنظيمي مفصل لوحدات الإنتاج وأقسامها مع توضيح العلاقات الرأسية والأفقية بينها ومسؤولية وسلطة كل منها.

يرتبط بموضوع تخطيط الإنتاج اثنين من محاور الدراسة الأساسية وهي:
1. أنواع وتقسيمات خطط الإنتاج.
2. أساليب تخطيط الإنتاج.
3. مشاكل خطط الإنتاج.

وفيما يلي توضيح لكل واحدة من هذه الفقرات.

أولاً: أنواع وتقسيمات خطط الإنتاج

إن الأركان الأساسية أعلاه التي ينبغي أن تؤخذ بعين الاعتبار عند صياغة خطة الإنتاج، ينبغي أن تكون حاضرة في كافة تقسيمات خطط الإنتاج في الواقع العملي، حيث من المعروف أن واقع الحال وطبيعة الإنتاج وطبيعة عمل واختصاص المنشأة والظروف البيئية الخارجية والداخلية يفرض تقسيمات وأنواع مختلفة لعملية تخطيط الإنتاج، حيث من المعروف أن هناك تقسيمات مختلفة لخطط الإنتاج وذلك بحسب وجهة النظر التي من خلالها يتم تقسيم الخطة، وأهم التقسيمات للخطط هي:

1- التقسيم الزمني لخطط الإنتاج. حيث تقسم خطط الإنتاج هنا إلى الأنواع التالية:

أ- خطط الإنتاج قصيرة الأمد، حيث يبلغ السقف الزمني لهذه الخطط بحدود الثلاثة أشهر أو أكثر بقليل وعادة تعرف بالخطط الموسمية وقد تصل إلى نصف سنوية أو سنة في بعض المنشآت.

ب- الخطط متوسطة الأمد، حيث يبلغ السقف الزمني لهذه الخطط أكثر من سنة واحدة وقد يصل إلى ثلاث سنوات.

ج- الخطط الطويلة الأمد، والتي يبلغ السقف الزمني لها أكثر من ثلاث سنوات، وعادة تعتمد هذه الخطط لتحديد الخطوط العامة لسياسة المنشأة المستقبلية.

2- الخطط بحسب المستوى الإداري: حيث تقسم هذه الخطط إلى الأنواع التالية:

أ- الخطط العامة والشاملة المعدة على مستوى الإدارة العليا (Master Schedule). ذات طابع تنفيذي حيث تعرف أيضاً بـ Work Force Schedule ويرمز لها MSP حيث تعبر هذه الخطة عن توجهات شمولية يتم من خلالها عرض التفاصيل المتعلقة بنشاطات الموارد البشرية وبرامج التشغيل واستخدام الموارد الأخرى.

ب- الخطط متوسطة الشمولية والتي تعد من قبل الإدارة الوسطى وتتضمن بيانات وتفصيلات أقل مما تقدم وتعرف بالخطة الإجمالية (Aggregate Plane).[1]

ج- الخطط المحدودة للوحدات الإنتاجية الفرعية والتي تتضمن بيانات وتفصيلات محدودة تتعلق بطبيعة المهام والأعمال التي تعتمد من قبل الوحدات الإنتاجية الفرعية.

ثانياً: أساليب تخطيط الإنتاج

يرد في مجال تخطيط الإنتاج أدوات وأساليب تخطيطة مختلفة. حيث لم يعد أسلوب الحدس والتخمين والتقدير الشخصي ملائماً لما هو عليه الحال من تطور وتعقد

(1) يضع W.J.Stevenson (1999) خطة الإنتاج Production Plan (باعتبارها الخطة الإجمالية Aggregate Plan) في موقع وسط بين خطة الأعمال Business Plan والجدول الرئيسي Master Schedule في صيغة تتابع Planning Sequence، في حين نجد أن Ritzman & Krajewski (2000) يضع الخطة المذكورة في إطار علاقة تبادلية Relationship of Production or Staffing Plan to other Plans.

1. Stevenson "Producion Operation Management" Mc Graw-Hill, 1999, p.525.
2. Krajewski & Ritzman "Operation Management " Prenticll, 2002, p.652.

وتشابك التحديات التي تواجه متخذ القرار في ظل نظام العولمة ونظم الإنتاج الحديثة (TQM، MRP، Jit، ...الخ)، وإن ما يظهر في الألفية الثالثة من تقنيات حديثة في نظم المعلومات تدعو إلى البحث عن الطرق والأساليب العلمية الحديثة في تخطيط الإنتاج، ومن أهم هذه الطرق والأساليب، هي:

1. أسلوب الموازنات التقديرية.
2. أسلوب نماذج التوقع (النماذج الرياضية الخاصة بالسلاسل الزمنية).
3. أسلوب البرمجة الخطية.

إن الأسلوب الأول والثاني هو من اختصاص الطروحات الفكرية للمهتمين بإدارة الإنتاج والعمليات أو ما يعرف بإدارة العمليات[1]. حيث أن اهتمامنا سوف ينصب على النوع الثالث وهو أسلوب البرمجة الخطية Linear Programming، وسوف يرد لاحقاً توضيح مفصل لذلك.

ثالثاً: مشاكل خطط الإنتاج

إن عملية تخطيط الإنتاج تعالج مشاكل مختلفة في الواقع العملي لمختلف المنشآت، حيث أن المنشآت الإنتاجية تواجه تحديات ومشاكل ذات طبيعة مختلفة يظهر بعضها في صيغة قيود أو محددات ترد بهيئة مدخلات لخطط الإنتاج كما هو واضح أدناه:

1- **محددات أو قيود تقنية أو تكنولوجية** وذلك من حيث نوعية المكائن والمعدات والطاقة التشغيلية المتاحة الخاصة بها ومقدار إنتاجية كل ماكنة أو مقدار الوقت اللازم لطرح الوحدة الواحدة من المنتوج وهو ما يعرف أيضاً بالقيود التكنولوجية على خطة الإنتاج.

2- **محددات أو قيود إنسانية أو ما يعرف بالموارد البشرية**، حيث أن واقع الحال يكشف عن تقسيمات وتصنيفات مختلفة لهذه الموارد وذلك مثل الاختصاص والجنس والعمر والخلفيات الاجتماعية والاقتصادية الأخرى المرتبطة بهذا المورد، ويعرف هذا النوع من التحديات والمشاكل باسم القيود أو الشروط البشرية.

---

(1) الفضل، مؤيد عبد الحسين، حاكم محسن محمد "إدارة الإنتاج والعمليات" مؤسسة زهران للنشر، الأردن، عمان 2004.

3- **محددات أو قيود مادية** أو ما يعرف بالموارد من مستلزمات الإنتاج الأساسية من المواد الأولية الأساسية والثانوية الداخلية عملية الإنتاج والتي تعرف أيضاً بالقيود أو الشروط المادية والتي تعتمد على نوعية الإنتاج.
4- **محددات أو قيود تجارية أو تسويقية** والتي تتمثل في حجم ونوعية الإنتاج المطلوب طرحه إلى السوق في الفترة الحالية والقادمة، وتعرف أيضاً بقيود أو شروط الطلب والعرض.

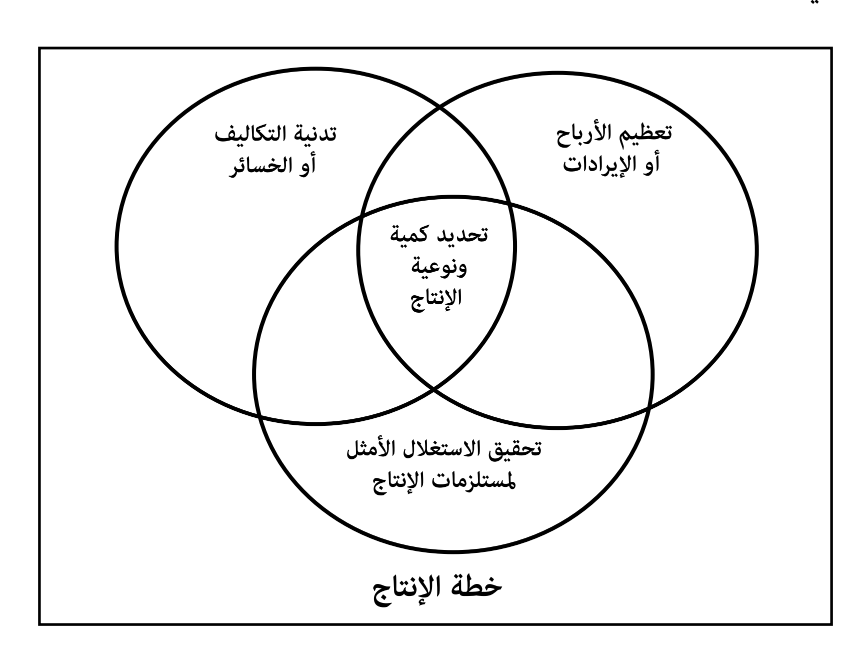
إن هذه التحديات والقيود يمكن أن تتشعب وتتشابك في الواقع العملي بشكل أكثر تطوراً وتعقيداً وهو ما يؤدي إلى ظهور البعض الآخر من المشكلات الفعلية التي تواجه المنشآت على اختلاف اختصاصاتها، ومن خلال تتبع هذه التشعبات يمكن أن نضع أمام القارئ مشاكل إنتاجية مختلفة تواجه متخذ القرار في الواقع العملي والتي تستدعي تطبيق نماذج البرمجة الخطية لغرض إعداد المعالجات اللازمة لها في إطار خطط مختلفة يكون إطارها العام هو خطة الإنتاج. ومن هذه المشاكل هي:

1- مشاكل تحديد كمية ونوعية الإنتاج المطلوب للفترة القادمة.
2- مشاكل تعظيم الإيرادات أو تدنية التكاليف المرتبطة بمستلزمات الإنتاج المستغلة (مواد أولية، ساعات تشغيل مكائن، أيدي عاملة).
3- تحديد مزيج مكونات الإنتاج من أجل إيجاد التركيبة المثلى التي تحقق أقصى فائدة للمستهلك والتي تعرف عادة بمشاكل التغذية.
4- تحديد بدائل تقطيع أو قص المواد الأولية بحيث يكون التالف أو المتبقي بعد عملية القص أقل ما يمكن.
5- الاستغلال الأمثل لوقت تشغيل المكائن المتاح والذي يعرف عادة بالطاقة التشغيلية للمكائن والمعدات.
6- التوزيع الأمثل للمهام الإنتاجية بين المدن ومواقع الإنتاج.
7- نقل وتسويق المنتجات بين المدن والمستهلكين من جهة والمعامل والمصانع من جهة أخرى مع تقليل عمليات النقل الفارغ.
8- تخصيص الكوادر الفنية أو المكائن والمعدات لإنجاز المهام الإنتاجية المطلوبة.

9- اختيار مواقع الإنتاج البديلة أو المشاريع الجديدة التي ترد ضمن دراسات الجدوى.

10- تدنية التكاليف وتعظيم الإيرادات ضمن المهام التي تتعلق بعمليات الإنتاج والتسويق مع التأكيد على تعظيم المؤشرات الإيجابية للإنتاج (إنتاجية الفرد أو الماكنة، مؤشر الربحية، مؤشر التكاليف..الخ).

إن هذه المشاكل وعلى اختلافها تتمحور حول هدف أساسي في خطة الإنتاج ألا وهو تحديد كمية ونوعية الإنتاج ويرتبط بهذا الهدف حلقات من الأهداف الفرعية أو الثانوية التي هي القاسم المشترك الأعظم لكافة خطط الإنتاج، ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل التالي:



حيث نلاحظ من الشكل السابق أن تعظيم الأرباح أو الإيرادات مع تدنية التكاليف أو الخسائر وكذلك تحقيق الاستغلال الأمثل لمستلزمات الإنتاج الأساسية (عمل، مواد، ساعات تشغيل مكائن،...الخ) . هي من الأهداف الفرعية أو هي تحصيل حاصل تحقق الهدف الأساسي ألا وهو تحقيق كميات ونوعيات الإنتاج المطلوبة.

2.1 البرمجة الخطية *Linear Programming*

من أجل توضيح هذا الموضوع يتم تقسيمه أدناه إلى الفقرات التالية:

1.2.1 المفهوم العام للبرمجة الخطية

البرمجة الخطية هي إحدى الأساليب الرياضية المهمة لبحوث العمليات، بدأ استخدامها بصورة فعلية في سنة (1947) على يد العالم الرياضي (George Dantzing) لحل بعض مشكلات التخطيط في المجالات العسكرية، وقد ازداد تطبيقها في الآونة الأخيرة لحل الكثير من المشكلات الصناعية والاقتصادية والعسكرية نظراً لاستخدام الحاسبات الإلكترونية على نطاق واسع.

إن البرمجة الخطية تبحث في توزيع الموارد المحددة بين الاستخدامات البديلة ضمن إطار المحددات أو القيود المفروضة على تحقيق أهداف منظمة الأعمال وذلك في حالة تعظيم (Maximize) قيمة الهدف كما هو الحال في تعظيم العائد النقدي أو قيمة المبيعات. أو في حالة تقليل أو تدنية (Minimize) قيمة الهدف ومثال ذلك تقليل تكاليف النقل أو تدنية تكاليف الإنتاج وما شابه ذلك. وقد عرفت المنظمة العربية للعلوم الإدارية البرمجة الخطية بأنها الطريقة الرياضية التي بموجبها يتم تخصيص الموارد النادرة أو المحدودة من أجل تحقيق هدف معين حيث يكون من المستطاع التعبير عن الهدف والقيود في صيغة معادلات أو متباينات خطية. وهناك تعريف آخر مختصر للبرمجة الخطية ينص على أنها ذلك الأسلوب الرياضي الذي يهتم بالاستخدام الأمثل للموارد المحدودة لتلائم الأهداف المطلوبة. ويتم ذلك وفق أسلوب علمي مبرمج. وهنا لا بد لنا من الإشارة إلى أن مصطلح البرمجة يشير إلى استخدام الأسلوب المنطقي والعلمي في تحليل المشكلة وعلاجها. أما مصطلح الخطية فإنه يعني أن هناك علاقة ثابتة بين المتغيرات الأساسية الداخلة في تركيب دالة الهدف والقيود يمكن تمثيلها في هيئة خط مستقيم.

إن من مستلزمات استخدام البرمجة الخطية في حل المشـاكل التـي تواجـه المنشـآت المختلفة، هو توفر الشروط التالية:

1- تحديد الهدف الذي تسعى المنشأة إلى تحقيقه، وقد ينطـوي الهـدف المـذكور عـلى تحقيق أقصى عائد أو الوصول بالكلفة إلى أدنى مستوى ممكـن. والصـيغة الرياضـية للهدف يطلق عليها اصطلاحاً دالة الهدف (Objective Function).

2- ينبغي أن تكون الموارد المتاحة لتحقيق الهدف محدودة، وهذا يعني أنه ليس هناك حاجة لبرمجة استخدام الموارد التـي لا تتصـف بالمحدوديـة حتـى وإن كانـت تمثـل عنصراً أساسياً في تحقيق الهدف.

3- وجود بدائل مختلفة لاستخدام الموارد المتاحة قيـد البرمجـة، بحيـث يكـون بمقـدور متخذ القرار اختيار واحد من هذه البدائل.

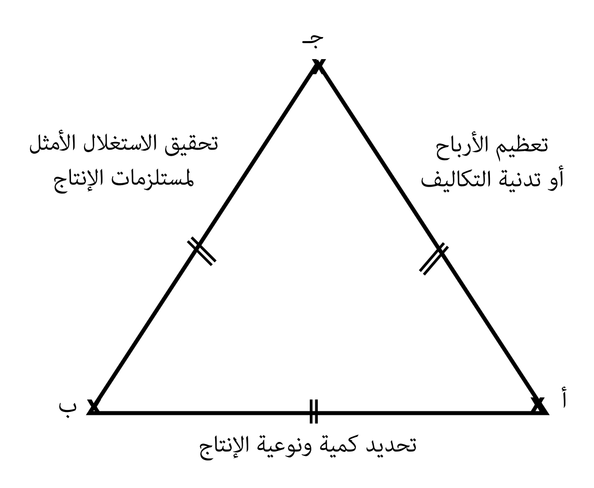
4- إمكانية التعبير عن كافة بيانات المشكلة، وهدف الدراسة والمتغيرات بصـورة كميـة أو رقمية.

5- وجود علاقة بين المتغيرات أو العوامل المتغيرة في المشكلة الخاضعة للبرمجة. وينبغي أن تكون هذه العلاقة خطية، وهذا يعني أن دالـة الهـدف والقيـود المفروضـة عـلى المشكلة هـي علاقـات رياضـية مـن الدرجـة الأولى سـواء كانـت مكتوبـة في صـيغة معادلات أم متباينات.

إن الواقع العملي يكشف عن أهم استخدامات البرمجـة الخطيـة في الواقـع العمـلي للمنشآت الإنتاجية ألا وهو مجال تخطيط الإنتاج، حيث لاحظنـا في الفقـرات السـابقة إن هنالك شريحة واسعة من المشاكل والتحـديات التـي تسـتوجب تطبيـق هكـذا نـوع مـن الأساليب العلمية، ورغـم تنـوع تطبيقـات البرمجـة الخطيـة مـن مشـاكل مختلفـة إلا إن الهدف أو القاعدة الأساسية يبقى كما ذكرنا سـابقاً هـو تحديـد كميـة ونوعيـة المنتجـات المطلوبة ضمن خطة الإنتاج، أما الأهداف الأخرى فهي تشكل عناصر مكملـة، حيـث مـن الناحية الشكلية يمكن تصويرها بأنها أشبه بأضلاع مثلث جانبية وهي:

- تعظيم الأرباح أو تدنية التكاليف.
- تحقيق الاستغلال الأمثل لمستلزمات الإنتاج.

كما هو واضح من الشكل التالي:



إن تطبيق واستخدام البرمجة الخطية في عملية تخطيط الإنتاج يتم عادة وفق خطوات ومراحل كما يلي:

أولاً: دراسة وتحليل المشكلة وجمع البيانات اللازمة عنها مع تحديد كافة الفرضيات والثوابت اللازمة لتطبيق الأسلوب المذكور.

ثانياً: تحديد الهدف المطلوب، حيث قد يكون تحقيق أعلى عائد أو تدنية التكاليف أو الاثنين معاً. يرد الهدف ضمن النموذج الرياضي للمشكلة في صيغة علاقة رياضية تكتب بشكل دالة وتسمى بدالة الهدف (Objective Function).

ثالثاً: تحديد القيود Constriants التي تربط المتغيرات الداخلة في دالة الهدف، وتعبر هذه القيود عن طبيعة الموارد المتاحة من مواد أولية، وقوى عاملة ومكائن ومعدات وغير ذلك من مستلزمات الإنتاج المحدودة، ويتم التعبير عن هذه القيود من خلال متباينات أو معادلات من الدرجة الأولى.

بالإضافة إلى ما تقدم فإن هناك قيوداً من نوع آخر يطلق عليها اسم قيود اللاسلبية (Non-negativity Constraints) والتي تعني أن جميع قيم المتغيرات الداخلة في النموذج الرياضي حقيقية وغير سالبة، ويعني أيضاً لا يجوز أن تكون الأعداد والكميات سالبة.

2.2.1 النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية

General form of Linear Programming

في ضوء ما تقدم من توضيحات حول طبيعة البرمجة الخطية ومفهومها ومكونات النموذج الرياضي للبرمجة الخطية، نجد أن بالإمكان التعبير عن النموذج بأبسط صورة له كما يلي:

إذا كان المطلوب هو العمل على إيصال قيمة دالة الهدف إلى القيمة المثلى لها، أي أن:

$$\text{Optimize } Z = f(x_1, x_2, \ldots, xn) \text{ Objective}$$

بعد استيفاء الشروط المعبر عنها كما يلي:

Subject to:

$$\text{Constriants} \left\{ \begin{array}{c} gi(x_1, x_2, \ldots, xn) \le, =, \ge \ bi \\ (i = 1,2 \ldots, m) \\ x_1, x_2, \ldots, xn \ge 0 \end{array} \right\}$$

ويمكن إعادة صياغة هذا النموذج الرياضي بعد الأخذ بنظر الاعتبار كافة الحدود الممكنة للنموذج من حيث عدد المتغيرات (j) وعدد القيود (i) (حيث أن j =1,2,…,n ،i= 1,2,…,m).

وكذلك بعد الأخذ بنظر الاعتبار إمكانية أن يكون المطلوب هو تعظيم الهدف إلى أعلى مستوى ممكن أو تخفيضه إلى أدنى مستوى ممكن، ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي:

القيود $\sum_{j=1}^{n} aij\ x\ j \leq, =, \geq b\ i \quad (i=1,2,...,m)$

دالة الهدف $Z = \sum_{j=1}^{n} cj\ x\ j \longrightarrow$ Max. or Min

قيمة اللاسلبية $x\ j \geq 0 \quad (j=1,2,...,m)$

تعتبر هذه الصيغة الأساس الرياضي للعديد من الصيغ الرياضية وعلى أساسها يمكن كتابة الصيغة التفصيلية التي تأخذ بنظر الاعتبار الصفوف والأعمدة الممكنة الخاصة بالنموذج. وإن كتابة الصيغة التفصيلية يعرف أيضاً بعملية فتح النموذج العام.

إن الصيغة التفصيلية تكتب كما يلي:

القيود
$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + ... + a_1n\ xn \leq, =, \geq b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + ... + a_2n\ xn \leq, = \geq b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ am_1\ x_1 + am_2\ x_2 + ... + amn\ xn \leq, =, \geq bm \end{cases}$$

دالة الهدف $Z = c_1\ x_1 + c_2\ x_2 + \dots + cn\ xn \rightarrow$ Max. or Min.

قيود اللاسلبية $x1, x2, \dots, xn \geq 0$

من الصيغة الرياضية الوارد ذكرها أعلاه يتم اشتقاق نوعين أساسيين من الصيغ الرياضية وهي:

أولاً: الصيغة القانونية Canonical form

إن من أهم صفات هذه الصيغة أن القيود في النموذج الرياضية تظهر بعلامة (≤) أقل أو يساوي أو (≥) أكبر أو يساوي أو كليهما معاً. وعادة تصل دالة الهدف إلى أقصى قيمة لها (.Max) مع الصيغة التي تكون قيودها الرياضية مكتوبة بعلامة (≤). في حين تصل دالة الهدف إلى أقل قيمة لها (.Min) إذا كانت قيود النموذج الرياضي

مكتوبة بعلامة (≥) أكبر أو يساوي، وتعرف هذه الصيغة بأنها الصيغة الرياضية الغير مستقرة. ويمكن كتابة الصيغة القانونية Canonical form للنموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية كما يلي:

(1) عندما تكون القيود مكتوبة بعلامة (≤) أقل أو يساوي

القيود
$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_1n\ xn \le b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_2n\ xn \le b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ am_1 x_1 + am_2 x_2 + \ldots + anm\ xn \le bm \end{cases}$$

دالة الهدف $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + cn\ xn \longrightarrow Max$

قيود اللاسلبية $x_1, x_2, \ldots, xn \ge 0$

علماً بأن الصيغة المختصرة لهذا النموذج هي:

$$\sum_{j=1}^{n} aij\ xj \le bi \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} cjxj \longrightarrow Max.$$

$$xj \ge 0 \quad (j = 1,2,\ldots,m)$$

(2) عندما تكون القيود مكتوبة بعلامة (≥) أكبر أو يساوي

القيود
$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_1n\ xn \ge b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_2n\ xn \ge b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ am_1 x_1 + am_2 x_2 + \ldots + amn\ xn \ge bm \end{cases}$$

دالة الهدف $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + cn\ xn \longrightarrow Min$

قيود اللاسلبية $x_1, x_2, \ldots, xn \ge 0$

علماً بأن الصيغة المختصرة لهذا النموذج هي:

$$\sum_{j=1}^{n} aij\ xj \geq bi \quad (i = 1,2,...,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} cjxj \longrightarrow \text{Min.}$$

$$xj \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

(3) عندما تكون القيود مكتوبة بعلامات مختلطة (≤) أقل ويساوي وعلاقـة (≥) أكـبر أو يساوي

$$\text{القيود} \begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + ... + a_1n\ xn \leq b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + ... + a_2n\ xn \geq b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ am_1 x_1 + am_2 x_2 + ... + anm\ xn \leq bm \end{cases}$$

$$\text{دالة الهدف} \quad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + cn\ xn \longrightarrow \text{Max.or Min.}$$

$$\text{قيود اللاسلبية} \quad x_1, x_2, ..., xn \geq 0$$

علماً بأن الصيغة المختصرة لهذا النموذج هي:

$$\sum_{j=1}^{n} aij\ xj \leq, \geq bi \quad (i = 1,2,...,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} cj\ xj \longrightarrow \text{Max. or Min.}$$

$$xj \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

ثانياً: الصيغة القياسية Standard form

إن الصيغة القياسية هي الحالة المستقرة للنموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية يتم اشتقاقها من الصيغة القانونية السابقة بعد أن يتم إضافة عدد من المتغيرات وطبقاً لكل

نوع من أنواع العلامات الرياضية (≤ , = , ≥) وذلك كما هو واضح في الجدول رقم (1-1) التالي:

جدول رقم (1-1) قواعد إضافة التغيرات

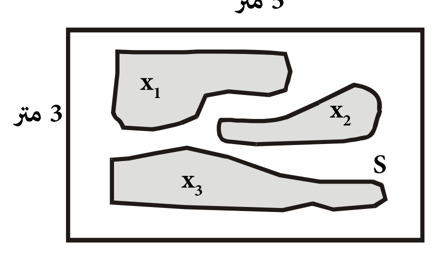
نوع التغير الذي يضاف إلى دالة الهدف	نوع المتغير الذي يضاف إلى القيد	نوع العلامة الرياضية في القيد
Max. Z ⟹ + 0.S Min. Z ⟹ + 0.S	+S	≤ أقل أو يساوي
Max. Z ⟹ + 0.S - MR Min. Z ⟹ + 0.S + MR	-S + R	≥ أكبر أو يساوي
Max. Z ⟹ - MR Min. Z ⟹ + MR	+R	= يساوي

إن تعريف الرموز الواردة في الجدول أعلاه هو كما يلي:

S + ⟸ هي متغير راكد Slack Variable

يضاف إلى طرف المعادلة الأصغر ويسمى أيضاً المتمم الرياضي وبلغة الإنتاج يعرف بمقدار مستلزمات الإنتاج غير المستغلة. والمثال التالي يوضح فكرة المتغير المذكور:

إذا كان لدينا قطعة قماش طولها 5 متر وعرضها 3 متر ومطلوب استغلالها لإنتاج بدلات معينة. فإنها يمكن أن تأخذ الشكل التالي:



ومن الشكل المذكور نستنتج أن:

$$X_1 + x_2 + x_3 \leq 15$$

وإذا كان S هو مقدار الفضلات بعد القص فإن:

$$x_1 + x_2 + x_3 + S = 15$$

حيث أن s تمثل في هذه الحالة أيضاً بمثابة المتمم الرياضي أو المتغير الراكد المشار إليه أعلاه.

s - ⇐ ويسمى بالتغير الفائض (Sur Pluse)

ويعبر عن مقدار المواد الفائضة، أي على سبيل المثال إذا كانت الحاجة إلى مادة أولية معينة هي 100 وحدة وكان الموجود هو 120 فإن الـ 20 الإضافية هي مقدار الفائض عن الحاجة. وعادة تطرح من الطرف الكبير في العلاقة التي يحتمل العلامة ≥ أكبر أو يساوي.

R ⇐ المتغير الاصطناعي Artificial Variable

وهو ذلك المتغير الذي يستخدم بهدف معالجة الإشارة السالبة للمتغير الفائض (-s). ويضاف هذا المتغير أيضاً إلى القيد الذي يحمل علامة المساواة من أجل تكوين ما يسمى بمصفوفة الوحدة Identity Matrix ضمن طريقة السمبلكس Simplex Method التي هي ضرورية لإكمال عملية الحل.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومن الجدير بالذكر هنا أن هذا المتغير ليس له أي معنى ضمن المشكلة المدروسة، وإن وجوده في المشكلة هو فقط لأغراض رياضية بحتة وبالتحديد من أجل معالجة الإشارة السالبة للمتغير الفائض التي تتعارض مع قيد اللاسلبية ($Si \geq 0$)، ولذلك فإن من المفروض التخلص من هذا المتغير في المراحل الأولى من عمليات الحل، ومن أجل تنفيذ هذه المهمة يستخدم معامل كبير بمقدار (M) لمرافقة هذا المتغير وعادة يكون أكبر من أي معامل آخر موجود في النموذج الرياضي من أجل التعمد بعدم ظهور هذا المتغير في النتائج النهائية للمشكلة.

M $\Leftarrow$ معامل المتغير الاصطناعي R وهو كمية كبيرة جداً افتراضية وعلى الأغلب تكون من مضاعفات المقدار (10) أي (الخ ...,1000 ,100 , 10) وعلى أساس هذا المعامل يتم تسمية طريقة الحل M-Technique أو ما يسمى أيضا (Big-M).

وعلى أساس ما تقدم فإن الصيغ القياسية لنماذج البرمجة الخطية هي كما يلي:

(1) عندما تكون قيود النموذج مكتوبة بعلامة (≤) أقل أو يساوي فإن تحويلها إلى الصيغة القياسية يكون كما يلي:

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_1 n\, xn + S_1 \leq b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_2 n\, xn + S_2 \leq b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ am_1 x_1 + am_2 x_2 + \ldots + amn\, xn + Sm \leq bm \end{cases}$$

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + cn\, xn + 0.S_1 + 0.S_2 \ldots + 0.Sm \longrightarrow Max.$$

$$x_1, x_2, \ldots, xn \geq 0$$
$$S_1, S_2, \ldots, Sm \geq 0$$

الصيغة المختصرة لهذا النموذج الرياضي هي:

$$\sum_{j=1}^{n} aij\, xj + Si = bj \qquad (i = 1,2,\ldots, m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} cj\, xj + 0.Si \longrightarrow Max.$$

$$Xj \geq 0 \ , Si \geq 0$$

(2) عندما تكون قيود النموذج مكتوبة بعلامة (≥) أكبر أو يساوي فإن تحويلها إلى الصيغة القياسية يكون كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_1n\,xn - S_1 + R_1 = b_1\\
&a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_2n\,Sn - S_2 + R_2 = b_2\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\
&am_1 x_1 + am_2 x_2 + \ldots + amn\,xn - Sm + Rm = bm
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Z = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \ldots + cn\,xn + 0.S_1 + 0.S_2 + \ldots + 0.Sm + MR_1\\
&+ MR_2 + \ldots + MRm \longrightarrow Min.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1, x_2, \ldots, xn \geq 0\\
&S_1, S_2, \ldots, Sm \geq 0\\
&R_1, R_2, \ldots, Rm \geq 0
\end{aligned}
$$

$M \Rightarrow$ كمية كبيرة جداً

الصيغة المختصرة لهذا النموذج الرياضي هي:

$$\sum_{j=1}^{m} aij\,xj + Si + Ri = bj \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} cj\,xj + 0.Si + MRi \longrightarrow Min.$$

$$Xj \geq 0,\ Si \geq 0,\ Ri \geq 0$$

$M \Rightarrow$ كمية كبيرة جداً

(3) عندما تكون قيود النموذج مكتوبة بعلامات رياضية مختلطة ($\geq , = \leq$)، فإن تحويلها إلى الصيغة القياسية يكون كما يلي (على افتراض لدينا ثلاثة قيود فقط وإن دالة الهدف تصل إلى .Min):

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_1n\,xn \leq b_1\\
&a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_2n\,xn \geq b_2\\
&a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + \ldots + a_3n\,xn = b_3
\end{aligned}
$$

$$Z = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \ldots + cn\,xn + \longrightarrow Min.$$

$$x_1, x_2, \ldots, xn \geq 0$$

يصبح النموذج أعلاه مكتوباً بالصيغة القياسية كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_1n\,xn + S_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_2n\,xn - S_2 + R_2 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_3n\,xn + R_3 = b_3$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + cn\,xn + 0.S_1 - 0.S_2 + MR_2 + MR_3 \longrightarrow Min.$$

$$x_1, x_2, \ldots, xn \geq 0$$
$$S_1, S_2, \quad \geq 0$$
$$R_1, R_2, \quad \geq 0$$

$M \Rightarrow$ كمية كبيرة جداً

3.2.1 افتراضات النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية

يتميز النموذج الرياضي العام لبرمجة الخطية بعدد من الافتراضات كي يكون مناسباً ومقبولاً من الناحية العلمية والعملية، وهي:

أولاً: التناسبية Proportionality

يعني هذا الافتراض أن المساهمة في دالة الهدف من جهة والكمية المستخدمة من المصادر من جهة أخرى تكون متناسبة مع قيمة كل متغير من متغيرات القرار. ولتوضيح ذلك نفرض أن أحد قيم المتغيرات الأساسية لمشكلة معينة هو 10 (x1=10) وإن هامش الربح للوحدة الواحدة من هذا المتغير يساوي 5 دينار، وإن كل وحدة واحدة من هذا المتغير الأساسي يتطلب وحدة واحدة من المادة الأولية الأولى ووحدة واحدة من المادة الأولية الثانية. وعليه فإن مساهمة هذا المتغير الأساسي في دالة الهدف هي 50 دينار (10 × 5) وإن إنتاج 10 وحدات من هذا المتغير يتطلب 30 وحدة (10 × 2 + 10 × 1 = 30) وحدة من المواد الأولية المتاحة.

ثانياً: الإضافية Additivity

إن هذا الافتراض يعني أن قيمة دالة الهدف والموارد الكلية المستخدمة في المشكلة يمكن إيجادها من خلال جميع مساهمة دالة الهدف والموارد المستخدمة لجميع المتغيرات. أي أن قيمة دالة الهدف تمثل مجموع مساهمات جميع المتغيرات الأساسية، وكذلك فإن الموارد الكلية المستخدمة تمثل مجموع الموارد المستخدمة لكل متغير في هذه المتغيرات.

ثالثاً: قابلية القسمة Divisibility

وتعني هذه أن المتغيرات يمكن أن تأخذ قيماً كسرية وليس بالضرورة أن تكون جميع قيم المتغيرات أعداداً صحيحة.

رابعاً: اللاسلبية Non-Negativity

وتعني هذه أن متغيرات القرار لا يمكن أن تكون كميات أو مقادير سالبة، حيث أن من المعروف من الناحية المنطقية أن القيم السالبة للكميات والمقادير تعتبر مستحيلة. إذ لا يمكن أن يكون الإنتاج أو التسويق للبضائع والسلع بالسالب. وعادة يعبر عن هذا الافتراض ($xj \geq 0$).

4.2.1 طرق حل نماذج البرمجة الخطية

بعد أن يتم صياغة النموذج الرياضي الخطي للمشكلة المدروسة ومن ثم التأكد من توفر كافة الافتراضات المشار إليها أعلاه تبدأ بعد ذلك مرحلة حل النموذج الرياضي لاستخراج النتائج والحلول النهائية للمشكلة. يتفق معظم الكتاب المهتمين بأسلوب البرمجة الخطية بأن هناك ثلاثة طرق أساسية لحل نموذج البرمجة الخطية، وهي:

أولاً: الطريقة البيانية (طريقة الرسم) Graphical Method

ثانياً: الطريقة الجبرية Algebraic Method

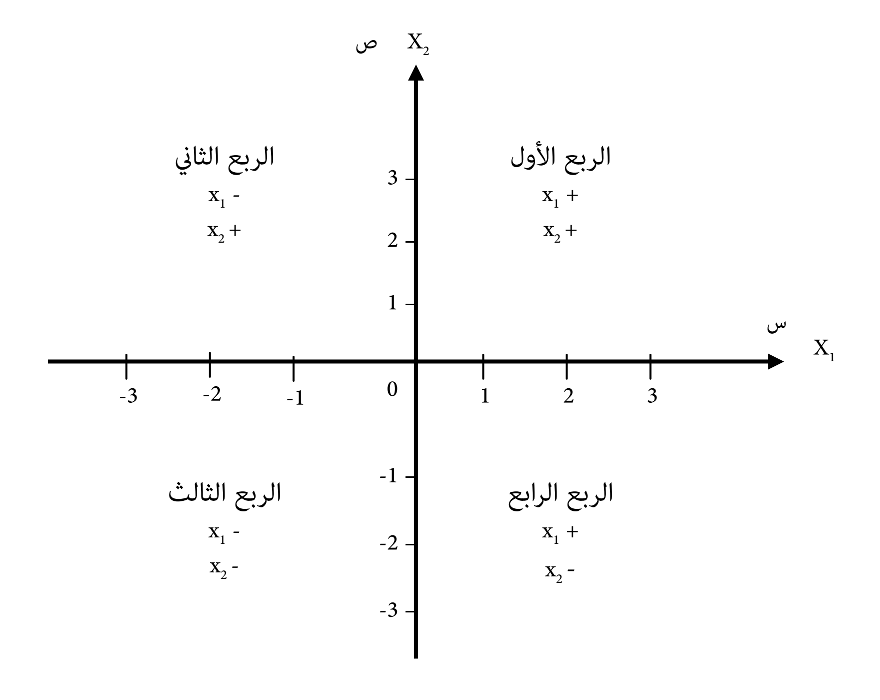
ثالثاً: الطريقة المبسطة (السمبلكس) Simplex method

وفيما يلي توضيح لفكرة كل واحدة من هذه الطرق:

- **الطريقة البيانية (طريقة الرسم) Graphical Method**

تعتبر الطريقة البيانية من الطرق الأساسية في حل النموذج الرياضي للبرمجة الخطية. وتستخدم هذه الطريقة فقط عندما يكون عدد المتغيرات للمشكلة اثنين فقط (x_1, x_2). إن فكرة هذه الطريقة تعتمد بالدرجة الأساسي على الرسم البياني لمتغيرات المشكلة، الذي من المفروض أن يتم في إطار الإحداثيات الأفقية والعمودية. ومن أجل توضيح فكرة هذه الطريقة ينبغي تقديم فكرة أولية عن هذه الإحداثيات، تعبر هذه الإحداثيات عن ما يسمى بالمحاور السينية (الأفقية) والمحاور الصادية (العمودية) التي يشيع استخدامها في الهندسة التحليلية وهي كما في الشكل رقم (1-1).

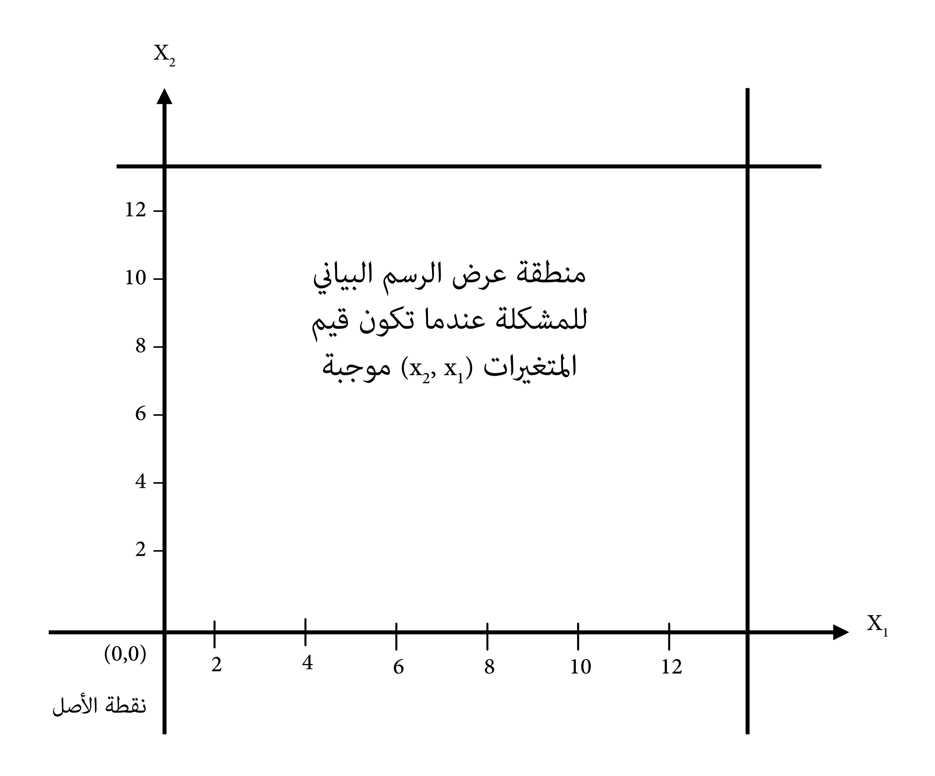
الشكل رقم (1-1) المحاور الأفقية والعمودية



يلاحظ من الشـكل إن كـل قـيم المتغـيرات (x_2, x_1) في الربـع الأول موجبـة، في حيـث كانت مختلفة الإشارة في الأرباع الأخرى. لذلك فإن الطريقة البيانية تعتمد بشكل أسـاسي على إظهار الحلول والنتائج النهائية للمشكلة في الربع الأول لكـون قـيم المتغـيرات (x_2 , x_1) تتفق مع الافتراض الرابع الوارد ذكره سابقاً والـذي يـنص عـلى أن كـل قـيم المتغـيرات (xj) ينبغي أن تكون موجبة ($xj \geq 0$) ولا يمكن قبول القيمة السالبة، ولهذا السـبب يـتم التركيـز على الربع الأول فقط وعدم إظهار بقية الأرباع كما هو واضح في الشكل رقم (2-1).

الشكل رقم (2-1) الربع الأول الذي يتم فيه عرض الرسم البياني للمشكلة

حيث قيم المتغيرات (x2, x1) موجبة



- **الطريقة الجبرية** **Algebraic Method**

بخصوص الطريقة الجبرية فإنها من الطرق البدائية التي انحسرت من الكثير في الكتابات والطروحات الخاصة بالمنهج الكمي، حيث لم تعد هذه الطريقة ملائمة للتطورات التي حصلت في تقنيات وأدوات المنهج الكمي وهي تعتمد فكرة الحل الجبري والرياضي البحت.

- **الطريقة المبسطة (طريقة السمبلكس)** **Simplex Method**

بالنسبة لطريقة السمبلكس Simplex Method، فهي الأكثر تطوراً في هذا المجال، وفي الفقرات اللاحقة سوف يرد توضيح مفصل لهذه الطريقة.

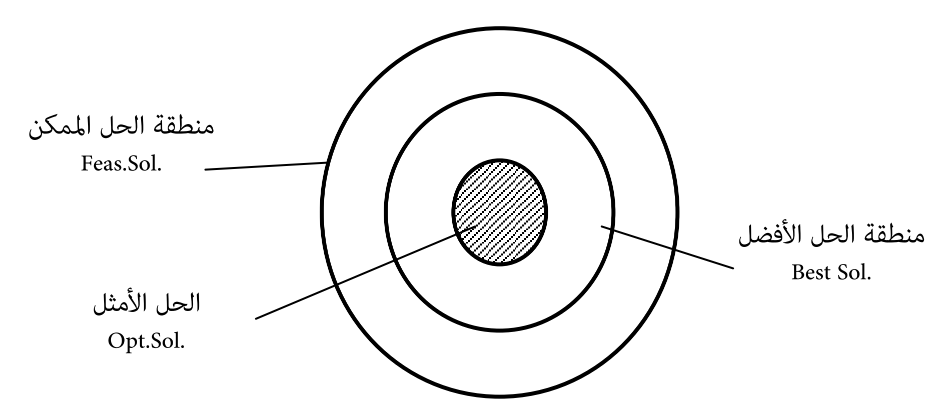
ومهما كانت الطريقة المستخدمة في عملية حل النموذج الرياضي لمشكلة البرمجة الخطية Linear Programming، فإن الجهود هنا تنصب على إيجاد ثلاثة أنواع من الحلول وهي:

1- **الحل الممكن** **Feasible Solution** وهو الحل الابتدائي الذي يتم الحصول عليه في بداية عملية الحل، ويتمثل بأية نقطة تقع داخل منطقة الحلول الممكنة FR التي يتم الحصول عليها فيما لو تم استخدام طريقة الرسم لذلك فهو عبارة عن أعداد غير محدودة من الحلول الممكنة، وفي حالة استخدام طريقة السمبلكس فإن هذا الحل يقع في الجدول الأول الابتدائي.

2- **الحل الأفضل** **Best Solution** وهو أحد نقاط الحل الممكن، حيث يقع عادة في الزوايا أو الأطراف الركنية لمنطقة الحلول الممكنة FR في حالة طريقة الرسم، ويتمثل بالمراحل التالية للجدول الابتدائي والذي تظهر فيه قيم ومؤشرات تتحسن بشكل تدريجي وصولاً للحل الأمثل.

3- **الحل الأمثل** **Optinal Solution**،وهو عبارة عن النقطة المتطرفة Extrim Point أو ما يسمى بـ Most attractive Corner وذلك في منطقة الحلول الممكنة FR وتكون أبعد ما يكون عن نقطة الأصل في حالة (Max.Z) وأقرب ما يكون إلى

نقط الأصل في حالة (Min.Z) وهو يظهر في آخر مرحلة في جدول الســمبلكس. ويتم عادة اختيار هذا الحل من بين نقاط الحل الأفضل. إن العلاقة بين هــذه الحلول الثلاث تتضح من خلال الشكل التالي:



من الشكل السابق يتضح أن الحل الأمثل جزء من الحل الأفضـل، وكـلا الاثنـين جـزء من الحل الممكن. وفي الفصول اللاحقة من كتابنا هذا سيرد توضـيح أكـثر تفصـيلاً لأهميـة هذه الحلول في مجال تخطيط الإنتاج.



أسئلة نظرية حول الفصل الأول

س1: ما هو مفهوم تخطيط الإنتاج.

س2: ما هي أنواع خطط الإنتاج وما هي أساليب الإنتاج.

س3: تكلم عن مشاكل خطط الإنتاج.

س4: وضح بالتفصيل ما هي علاقة عناصر خطة الإنتاج مع بعضها البعض وما هو العنصر المحدد في هذه الحالة.

س5: ما هو مفهوم البرمجة الخطية وما هو مفهوم النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية.

س6: ما هي خطوات تطبيق البرمجة الخطية.

س7: اكتب الصيغة الرياضية للنموذج العام للبرمجة الخطية بشكل مختصر وتفصيلي.

س8: ما هو المقصود بالصيغة القانونية والصيغة القياسية للبرمجة الخطية وما هي علاقتهما بالبرمجة الخطية.

س9: ما هذو الفرق بين المتغير الراكد .Slack Var والمتغير الفائض Sur Pluse.

س10: ما هو المقصود بالمصطلح (Big-M) وما هو دور المعامل M في هذه الحالة.

س11: ما هو مفهوم المتغير الاصطناعي (R) وما هو أهميته في طريقة السمبلكس.

س12: ما هي افتراضات النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية.

س13: ما هي طرق الحل في البرمجة الخطية ما هو الفرق بينهما.

س14: ما هو أنواع الحلول في البرمجة الخطية، عددها وحد الفرق بين كل واحد منها.

س15: ما هي أهمية الربع الأول في المحاور السينية والصادية (الأفقية والعمودية) وما علاقة هذا الربع بالقيمة: ($Xj \geq 0$).

س16: ما هو المقصود بنقطة الأصل وما علاقتها بالقيمة للمتغيرات (x_2, x_1).

الفصل الثاني

معالجة مشاكل تخطيط الإنتاج باستخدام الطريقة البيانية

2.1 تحديد كمية ونوعية الإنتاج (هيكل المنتجات)

2.2 تحديد مزيج مكونات الإنتاج

3.2 اختيار بدائل الإنتاج (القطع)

أسئلة نظرية حول الفصل الثاني

الفصل الثاني

معالجة مشاكل تخطيط الإنتاج

باستخدام الطريقة البيانية

ذكرنا سابقا في الفصل السابق بأن هناك مشاكل فرعية مختلفة تقع في إطار عمليات تخطيط الإنتاج ومنها ما سوف يرد أدناه.

1.2 تحديد كمية ونوعية الإنتاج (هيكل المنتجات)

من أجل توضيح الكيفية التي يتم بموجبها تحديد كمية ونوعية الإنتاج ضمن إطار عملية تخطيط الإنتاج، نضع الافتراضات التالية:

a_{ij} ⇐ كمية (i) مستلزمات الإنتاج اللازمة لطرح (j) من وحدات الإنتاج

$i=1,2,\ldots,r$, $j = 1,2,\ldots,n)$

b_i ⇐ مقدار المتوفر من مستلزمات الإنتاج من النوع (i)

c_j ⇐ سعر بيع أو ربح الوحدة الواحدة المتوقع في بيع (j)من الإنتاج

d_j ⇐ أقل كمية يمكن إنتاجها من (j) من الإنتاج

g_j ⇐ أكبر كمية يمكن بيعها من الإنتاج (j)

المتغير الأساسي في هذه الحالة هو (x_j) الذي يمثل كمية الإنتاج المطلوب طرحه من قبل المنشأة الإنتاجية. والمطلوب في هذه الحالة تحديد كمية ونوعية المنتجات التي ينبغي طرحها بحيث لا يتجاوز ما هو متوفر أو متاح من مقدار ما هو متوفر من مستلزمات الإنتاج ويؤدي ذلك في النهاية إلى تعظيم الربح المتوقع من عمليات البيع. النموذج الرياضي الذي يعبر عن هذه الحالة هو:

$$a_{11}x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + \ a1n\ xn \ \le \ b_1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$ar_1x_1 + ar_2x2 + \ldots + arnxn \quad \le \quad br$$

لكافة قيم (j): $dj \le xj \le gj$

$x_1 , x_2 , \ldots , xn \ge 0$

$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + cnxn \to Max.$

مثال رقم ❶

منشأة تنتج نوعين من المنتجات w_1, w_2 ويتم استهلاك لهذا الغرض عدد من أنواع مستلزمات الإنتاج، إلا أن اثنين منها وهي الضرورية لإكمال عملية الإنتاج تعتبر محددة الكمية (I., II.) وكما يلي:

(I.) النوع الأول ⇐ 96000 وحدة

(II.) النوع الثاني ⇐ 8000 وحدة

1- مقدار استخدام هذه المواد في عملية الإنتاج لكل وحدة واحدة من المنتجات هي كما في الجدول التالي:

المنتجات / مستلزمات الإنتاج	W_1	W_2
I.	16	24
II.	16	10

2- كمية الإنتاج ولأسباب تسويقية أو الشروط الخاصة بالطلب محدودة، وكما يلي:

المنتج الأول: أقل أو يساوي 3000 وحدة

المنتج الثاني: أقل أو يساوي 4000 وحدة

3- سعر بيع المنتج الأول 30 دينار

المنتج الثاني 40 دينار

4- ينبغي المحافظة على العلاقة بين كلا النوعين من المنتجات وهي $w_2 = \frac{2}{3} w_1$.

المطلوب:

تحديد كمية ونوعية الإنتاج التي تؤمن أكبر قدر ممكن من الإيرادات الناجمـة عـن عملية البيع في ظل المحددات الحالية مستخدما طريقة الرسم في عملية الحل.

الحل:

في البداية يتم بناء أو صياغة النموذج الرياضي لهذه المشكلة وذلك كما يلي:

نفرض أن:

$x_1 \Leftarrow$ كمية الإنتاج من المنتج W_1

$x_2 \Leftarrow$ كمية الإنتاج من المنتج W_2

أولا: القيود الأساسية

أ- استخدام مستلزمات الإنتاج

(1) $16x_1 + 24x_2 \leq 96000$

(2) $16x_1 + 10x_2 \leq 80000$

ب- العلاقة بين كمية المنتج الأول والثاني في السوق ينبغي أن تكون على النحو التالي:

(3) $x_2 = \frac{2}{3} x_1$

ج- كمية الإنتاج من النوع الأول والثاني ينبغي أن تكون أقل أو يساوي حدود معينة وهي كما يلي:

(4) $0 \leq x_1 \leq 3000$

(5) $0 \leq x_2 \leq 4000$

ثانيا: دالة الهدف: تعظيم الإيرادات المتوقعة

$$F(x_1, X_2) = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow Max.$$

ويمكن إعادة صياغة النموذج الرياضي أعلاه كما يلي:

(1) $16x_1 + 24x_2 \leq 96000$

(2) $16x_1 + 10x_2 \leq 80000$

(3) $x_2 = \frac{2}{3} x_1$

(4) $0 \leq x_1 \leq 3000$

(5) $0 \leq x_2 \leq 4000$

(6) $F(x_1, x_2) = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow Max$

قبل البدء بعملية الحل باستخدام أسلوب الرسم، يتم تحويل هذه العلاقات الرياضية الواردة أعلاه بشكل مؤقت إلى معادلات وكما يلي[1]:

نفرض أن:

$16x_1 + 24x_2 = 96000$

$$(6000.0) \begin{cases} x_2 = 0 \\ 16x_1 = 96000 \\ x_1 = \frac{96000}{16} = 6000 \end{cases}$$

$$(0,4000) \begin{cases} x_1 = 0 \\ 24x_2 = 96000 \\ x_2 = \frac{96000}{24} = 4000 \end{cases}$$

(1) يرد في هذا الصدد ثلاث أنواع من أساليب تحويل المتباينات إلى معادلات وهي:

1- طريقة تجزئة العلامة الرياضية

2- طريقة إضافة المتمم الرياضي.

3- طريقة الفرضية.

لمزيد من التفاصيل، راجع كتابنا مع الدكتور محمود العبيدي، الموسوم "بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال" دار الوراق للنشر، الأردن-عمان، 2003.

$16\,x_1 + 10x_2 = 80000$

$$(4000.0)\begin{cases} x_2 = 0 \\ 16x_1 = 80000 \\ x_1 = \dfrac{80000}{16} = 4000 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{2}{3}\ x_1$$

إن هذه القيمة تتحدد في ضوء الرسم البياني الخاص بالمشكلة، وبالتحديد من خلال المستقيم الذي ينطلق من نقطة الأصل، فإن على سبيل المثال إذا أخذنا على المحور الأفقي (x_1) قيمة مقدارها $x_1 = 3000$، فإن قيمة x_2 تتحدد في ضوء ذلك وكما يلي:

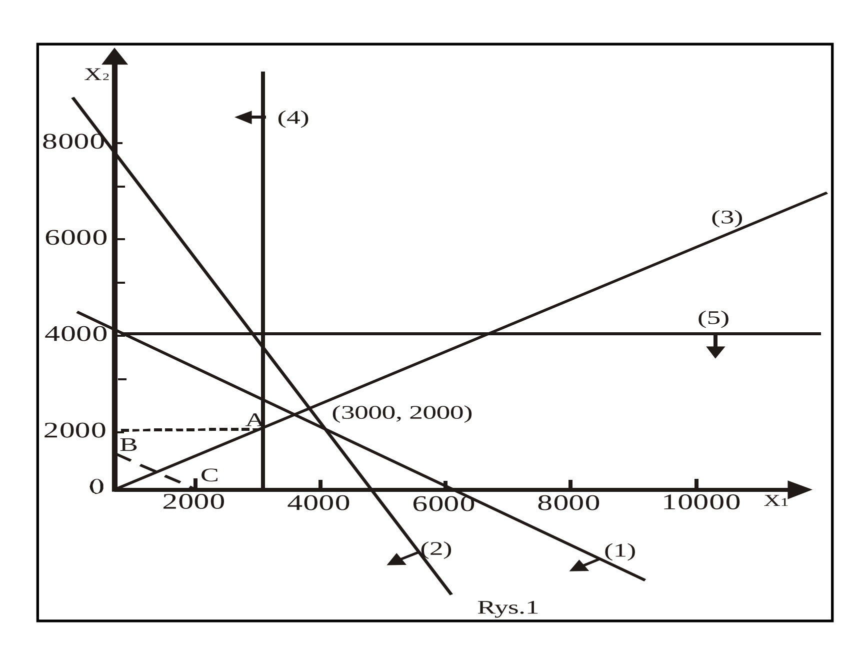
$$x_2 = \frac{2}{3}\quad 3000 = 2000$$

بالنسبة للقيود الأخرى، (4) ,(5) فإن تحديد قيم النقاط الخاصة بإحداثيات صيغة القيود تتمثل في النقاط التالية:

القيمة (4) $\Leftarrow$ (3000,0)

القيمة (5) $\Leftarrow$ (0,4000)

وفي ضوء ما تقدم يمكن رسم البياني الخاص بهذه المشكلة (Rys.1)



Rys.1

إن حدود منطقة الحلول الممكنة Feasiable Region تمتد بـين النقطتـين OA، وفي هـذه المنطقة ينبغي البحث عن الحلول الثلاث:

1- الحل الممكن Feasible
2- الحل الأفضل Beast Solution
3- الحل الأمثل Optimal Solution

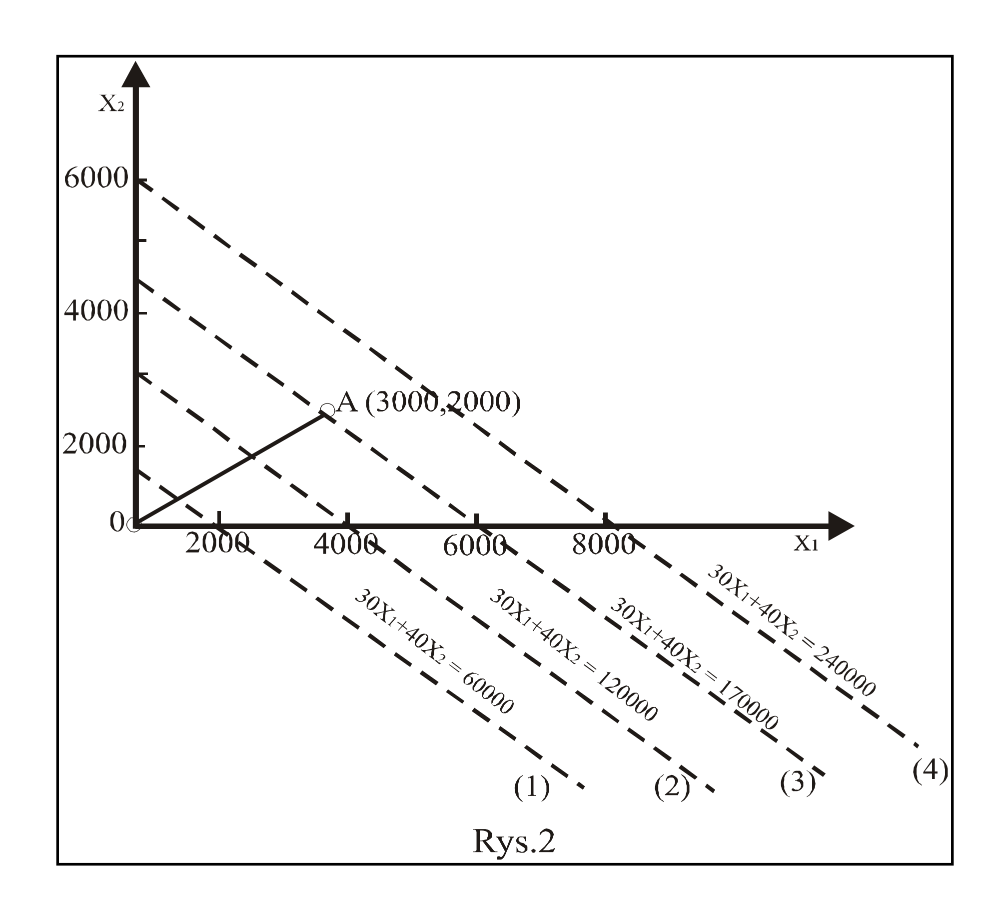
ومن أجـل تحديـد نقطـة الحـل الأمثـل بيانيـا يتطلـب الأمـر في هـذه الحالـة رسـم مستقيم معادلة دالة الهدف. ويتم ذلك بأخذ قيم افتراضية وكما يلي:

$F(x_1, x_2) = 60000$
$F(x_1, x_2) = 120000$
$F(x_1, x_2) = 170000$
$F(x_1, x_2) = 240000$
⋮ ⋮

على سبيل المثال العلاقة الرياضية الأولى

$F(x_1, x_2) = 30x_1 + 40x_2 = 60000$

موقع هذا المستقيم والمستقيمات الأخرى يتضح في الشكل (Rys.2)



Rys.2

المستقيم الأول ينطبق على الخط المستقيم BC في الشكل (Rys.1) والمستقيمات الأخرى ترسم بشكل موازي له وبشكل متسلسل لغاية نهاية الخط المستقيم OA. أي أن آخر مستقيم يمكن قبوله في هذه الحالة هو المستقيم رقم (3) الذي يمس النقطة A التي هي آخر نقطة في منطقة الحلول الممكنة (FR) وهي أبعد ما يكون عن نقطة الأصل. إن إحداثيات نقطة (A) هي $(x_1=3000, x_2=2000)$ وبالتعويض في معادلة المستقيم رقم (3) نحصل على ما يلي:

$$F(x_1, x_2) = 30(3000) + 40(2000) = 170000$$

وهي أعلى قيمة لدالة الهدف وتمثل الأرباح الكلية المتوقعة.

مثال رقم ❷

إحدى المنشآت الإنتاجية متخصصة في طرح نوعين من المواد الغذائية W_1, W_2، وتستخدم لهذا الغرض أنواع مختلفة مستلزمات الإنتاج، إلا أن هناك اثنين فقط من هذه المستلزمات ذات كميات محدودة، أي أن:

I. النوع الأول 36000 وحدة

II. النوع الثاني 50000 وحدة

استخدام هذه المستلزمات في عملية الإنتاج تتضح من خلال الجدول التالي:

المنتجات / المستلزمات	W_1	W_2
I.	6	6
II.	10	5

المنتج الثاني w_2 لا يمكن طرحه بأكثر من 4000 وحدة

المنتج الأول w_1 لا يخضع لشروط الكمية

المطلوب:

ما هي أفضل كمية من الإنتاج من كل نوع، إذا علمت أن الربح المتوقع بالنسبة لكل المنتجين متساوي:

الحل:

نبدأ عملية الحل بصياغة العلاقات الرياضية الخاصة بهذه المشكلة وذلك كما يلي:

نفرض أن كمية الإنتاج x

(1)　$6x_1 + 6x_2 \leq 36000$

(2)　$10x_1 + 5x_2 \leq 50000$

(3)　$x_1 \geq 0$

(4)　$0 \leq x_2 \leq 4000$

وإذا كان المطلوب تعظيم الأرباح الكلي فإن:

$$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow Max$$

ويمكن إعادة كتابة الصيغة الرياضية لهذا النموذج كما يلي:

(1) $6x_1 + 6x_2 \leq 36000$

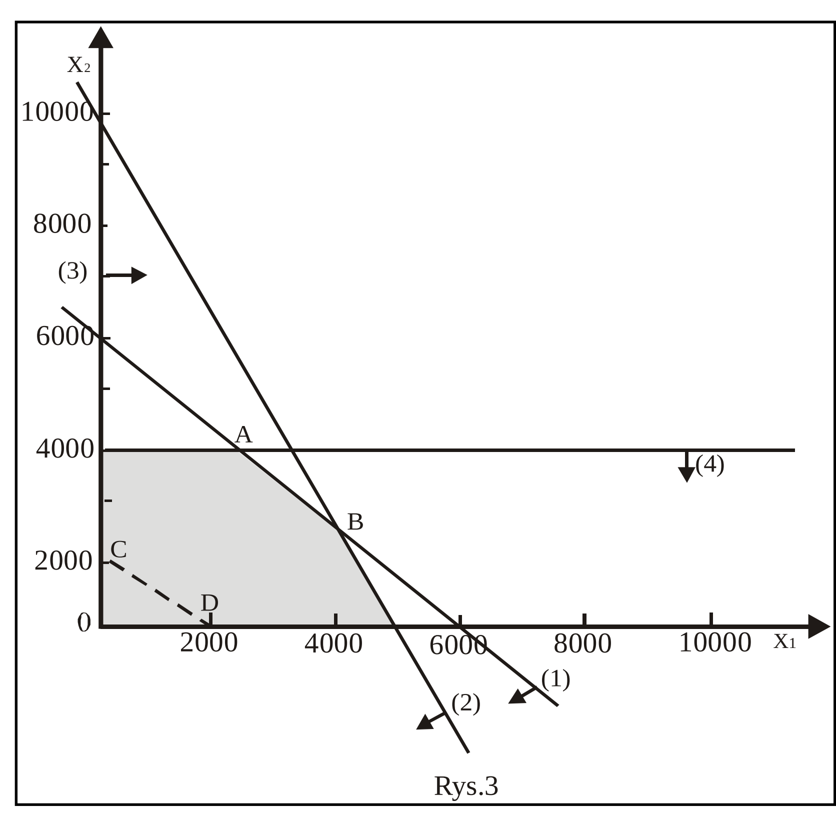
(2) $10x_1 + 5x_2 \leq 50000$

(3) $x_1 \geq 0$

(4) $0 \leq x_2 \leq 4000$

(5) $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow Max$

وكما مر معنا في المثار رقم (1)، يتم تحويل المتباينات إلى معادلات رياضية ثابتة ومنها يتم استخراج النقاط اللازمة لرسم المستقيمات بكل معادلة رياضية وعندها نحصل على الشكل (Rys.3).



Rys.3

إن منطقة الحلول الممكنة (FR) تظهر من خلال تقاطع المستقيمات التـي تعـبر عـن القيود، وهي ذات شكل هندسي رباعي. في الشكل المذكور يتم رسم المستقيم CD انطلاقا من الفرضيات التالية:

(1) $F(x_1, x_2) = 4000$

(2) $F(x_1, x_2) = 8000$

(3) $F(x_1, x_2) = 12000$

⋮ ⋮

نفرض تم استخدام القيمة الأولى لهذا الغرض لرسـم المسـتقيم الأول CD وذلـك كـما يلي:

$$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 4000$$

حيث أن:

$$x_1 = 2000$$

$$x_2 = 2000$$

إن الحـل الأمثـل لهـذه المشـكلة يقـع في كـلا النقطتـين B, A، حيـث أن الإحـداثيات والنقاط بكل منها هي:

النقطة A ⇐ (2000 , 4000)

النقطة B ⇐ (4000 . 2000)

وبذلك تكون قيمة دالة الهدف هي 6000 وحدة نقدية، ومن الجدير بالـذكر هنـا أن أي نقطة على المستقيم BA يمكن أن تحقق نفس قيمة الحل الأمثل المذكورة أعلاه، وهـذه الحالة تعرف بتعدد الحلول المثلى.

مثال رقم ❸

إحدى المنشآت الإنتاجية ترغب في طرح أربع أنواع من المنتجات (w_1,w_2, w_3, w_4)، تستخدم لهذا الغرض عدد من مستلزمات الإنتاج اثنين منها نقطة ذات كميات محدودة، وهي:

I. النوع الأول 90000 وحدة

II. النوع الثاني 120000 وحدة

الأرباح المتوقعة في بيع المنتجات الأربعة هي على التوالي (4,6,3,12).

المطلوب:

تحديد كمية الإنتاج ونوعيته الذي يجعل من الأرباح الكلية أعلى ما يمكن، إذا علمت أن كمية استهلاك مستلزمات الإنتاج هي كما في الجدول التالي:

المنتجات / المستلزمات	W_1	W_2	W_3	W_4
I. الأول	1	2	1.5	6
II. الثاني	2	2	1.5	4

الحل:

إن حل هذه المشكلة يبدأ بافتراض رموز معينة لكميات الإنتاج وذلك كما يلي:

X_1: كمية الإنتاج من w_1

X_2: كمية الإنتاج من w_2

X_3: كمية الإنتاج من w_3

X_4: كمية الإنتاج من w_4

وبناءا على ما تقدم يتم صياغة النموذج الرياضي التالي:

(1) $x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + 6x_4 \leq 90000$

(2) $x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + 4x_4 \leq 120000$

(3) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$

(4) $F (x_1,x_2, x_3, x_4) = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 12x_4 \rightarrow Max$

إن هذا النموذج الرياضي يتكون من أربعة متيغرات (x1,x2, x3, x4)، لذلك لا يمكن حله بصيغته الحالية بطريقة الرسم، لذلك لا بد من البحث عن طريقة أخرى، وهي طريقة النموذج المقابل Dual Model (DM) بموجب هذه الطريقة يعتبر النموذج الرياضي بصيغته الحالية مكتوب بالصيغة الأولية Primal Model (PM)، وإن تحويله إلى الصيغة الرياضية للنموذج المقابل أو الثنائي يتطلب القيام بعدد من المتغيرات في النموذج الأولي وذلك كما يلي: ([1])

1- في النموذج المقابل يكون عدد المتغيرات مساوي لعدد القيود في النموذج الأولي وبالعكس.

2- معاملات دالة الهدف في النموذج الأولي تصبح قيم حرة في النموذج المقابل وبالعكس.

3- معاملات المتغيرات في القيود للنموذج الأولي {aij} تقلب بحيث يصبح الصف العمود والعمود صف ويكون {aji} في النموذج المقابل.

4- تتغير تسمية المتغيرات من xj في النموذج الأولي إلى y_i في المقابل.

5- تتغير تسمية قيمة دالة الهدف من z في الأولي إلى w في المقابل.

6- تبديل العلامات الرياضية للقيود فإذا كانت أقل يساوي (≤) في النموذج الأولي (≥) أكبر أو يساوي في النموذج المقابل وبالعكس.

(1) في الفصل الرابع من كتابنا هذا سوف يرد تفصيل أوسع لموضوع النموذج المقابل، حيث بقدر تعلق الأمر بتحديد كمية ونوعية الإنتاج في الفقرة الحالية (2-1) في ظل اعتماد طريقة الرسم يتم التطرق لهذا الموضوع.

إن حل هكذا نوع من النماذج الرياضية يتم على أساس الاستفادة من بعض النظريات والقواعد التي يمكن أن ترد بهذا الخصوص، وذلك مثل:

1- إذا تم تحديد الحل الأمثل لكلا النموذجين (PM) و (DM) بحيث يكون لدينا القيم التالية:

$$x = (x_1, x_2, \dots , xn)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots , yr)$$ و

فإن قيمة دالة الهدف في كلا النموذجين سوف تكون متساوية، أي أن:

$$F (x_1, x_2 , \dots , xn) = G (y_1, y_2, \dots, yr)$$

2- إذا كانت j من القيود في النموذج المقابل الذي تم فيه الحصول على الحل الأمثل تم استيفائها مع متباينات (بشكل قوي أو واضح) فإن ما يقابل ذلك j من المتغيرات (xj) في الحل الأمثل للنموذج الأولي تكون قيمتها صفرا ومن أجل البدء بعملية التغير للنموذج الحالي (PM) فإنه طالما إن النموذج المذكور يتكون من أربع متغيرات وقيدين، فإن النموذج المقابل سوف يتكون من أربعة قيود ومتغيرين وذلك كما يلي:

(1) $y_1 + 2y_2 \geq 4$

(2) $2y_1 + 2y_2 \geq 6$

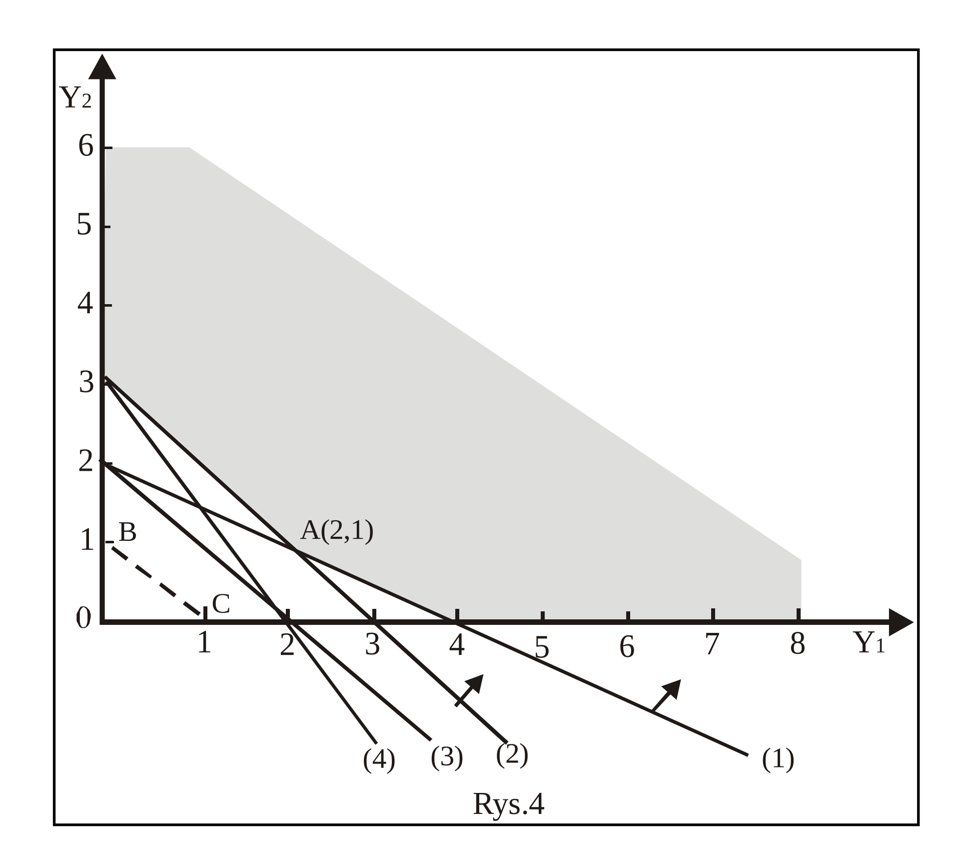
(3) $1.5y_1 + 1.5y_2 \geq 3$

(4) $6y_1 + 4y_2 \geq 12$

(5) $y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0$

(6) $G (y_1, y_2) = 90000\, y_1 + 120000y_2 \rightarrow \text{Min.}$

إن النموذج الرياضي في هذه الحالة يمكن حله بالطريقة البيانية (الرسم) بعد أن يتم تحويل المتباينات إلى معادلات رياضية ومنها يتم حساب النقاط الخاصة بكل معاملة أو مستقيم. الشكل (Rys.4) يعبر عن هذه الحالة.



Rys.4

من الشكل أعلاه يتضح أن منطقة الحلول الممكنـة (FR) تقـع إلى فـوق المسـتقيمات المتقاطعة، وأن مستقيم دالة الهدف سوف يتحرك باتجاه نقطة الأصل وآخر نقطة سـوف يـرتبط معهـا بـتماس هـي النقطـة A. وإن إحـداثيات هـذه النقطـة هـي ($y_1=2$, $y2=1$) وبالتعويض في معادلة دالة الهدف تحصل عن قيمة هذه الدالة وكما يلي:

$$G\ (y_1\ ,\ y_2) = 300000$$

الخطوة التالية، يتم فيها بيان كيف أن الحل الأمثـل في حالـة النمـوذج المقابـل DM يحقق الشروط من 1-4. مع الأخذ بنظر الاعتبار أن الشروط 1, 2 هـي ضـعيفة مـن حيـث التحقق، بين الشروط 3 , 4 يتم تحققها بشدة، ومن هنا وبالاستناد إلى القاعدة

المشار إليها في هذا الصدد فإن المتغيرات ذو القيم 3 , 4 في النمـوذج الأولي PM (أي x^*_4, x^*_3) سوف يكون لها قيمة مساوية للصفر.

من أجل حل النموذج الأولي PM يتطلب الأمر في البداية حل المعادلات التالية:

$$X_1 + 2x_3 = 90000$$

$$2x_1 + 2x_3 = 120000$$

إن حل هاتين المعادلتين يؤدي إلى الحصول على:

$$X_1 = 30000$$

$$X_2 = 30000$$

وعلى هذا الأساس فإن قيمة دالة الهدف تحسب كما يلي:

$$F (x_1 , x_2, x_3, x_4) = 300000$$

وهذا يعني تحقق الشروط المتعلق بتساوي قيم دالة الهدف في كلا الحالتين أي أن:

$$G (y_1, y_2) F (x_1, x_2, x_3, xn) = 300000$$

وهو ما جاء في القاعدة رقم (1) الوارد ذكرها أعلاه.

من أجل التوسع في عرض الجانب التطبيقي للبرمجة الخطية في الواقع العملي سوف نطرح في الفقرة اللاحقة مشاكل وتطبيقات مختلفة حـول تحديـد كميـة ونوعيـة الإنتـاج باستخدام الأسلوب المذكور.

مشاكل مختلفة حول تحديد كمية ونوعية الإنتاج

المشكلة رقم (1) **Problem no. (1)**

إحدى المنشآت الصناعية متخصصة بطرح نوعين من المنتجات حيث يتم ذلك باستخدام ثلاث أنواع من المكائن والمعدات وهي:

النوع الأول من المكائن ⇐ O_1

النوع الثاني من المكائن ⇐ O_2

النوع الثالث من المكائن ⇐ F

إن وقت تشغيل هذه المكائن محدود وتبلغ عدد الساعات التشغيلية لكل ماكنة كما يلي:

$O_1 \Rightarrow 33000$ ساعة

$O_2 \Rightarrow 13000$ ساعة

$F \Rightarrow 80000$ ساعة

الوقت اللازم لطرح وحدة واحدة من الإنتاج محسوب بالساعات هو كما يلي:

الوقت / المكائن	مقدار الوقت اللازم لكل واحد من المنتجات	
	I.	II.
O_1	3	1
O_2	1	1
F	5	8

الربح المتوقع من عملية البيع للمنتج الأول 1 دينار والمنتج الثاني 3 دينار ومن خلال دراسة وتحليل السوق لوحظ أن المنتج الثاني لا يمكن البيع منه أكثر من 7000 وحدة.

المطلوب: ما هي كمية الإنتاج من النوع الأول والثاني بحيث يكون الأرباح الناجمة عن عملية البيع أعلى ما يمكن. وهل سوف تتغير كمية ونوعية المنتجات فيما لو تم تحسين المواد الأولية بالنسبة للمنتج رقم (1) وتم رفع ربح الوحدة الواحدة من المنتج المذكور من (1) إلى (4) دينار.

النتائج النهائية:

$x_1 = 4800 \;,\; x_2 = 7000$

$F(x_1, x_2) = 25800$

المشكلة رقم (2) **Problem no. (2)**

إحدى المنشآت الإنتاجية متخصصة بطرح أربعة أنواع من المنتجات وهي D, C, B, A ، حيث يتم صنع هذه المنتجات باستخدام نوعين من المكائن وهي M2, M1. إن وقت العمل الذي سيستغرقه كل واحد في هذه المنتجات على كل واحدة من هذه المكائن موضح كما هي في الجدول التالي:

المكائن / المنتجات	وقت العمل بالنسبة لكل وحدة واحدة من الإنتاج	
	M_1	M_2
A.	1.0	2.0
B.	1.5	2.5
C.	2.0	3.0
D.	1.0	0.5

وقد علمت ما يلي:

1- إن السوق التي تعمل فيها هذه المنشأة يمكن أن تستوعب أية كمية من الإنتاج.

2- ربح الوحدة الواحدة لكل منتج هو:

A. ⇐ 2.0 دينار

B. ⇐ 2.5 دينار

C. ⇐ 4.0 دينار

D. ⇐ 1.5 دينار

3- إن الماكنة M_1 يمكن أن تعمل أكثر من 100 ساعة شهريا، بينما الماكنة M_2 عملها لا يقل عن 50 ساعة شهريا.

المطلوب: تحديد أفضل خطة للإنتاج بحيث تكون الأرباح الكلية أعلى ما يمكن.

النتائج النهائية:

$$F\ (x_1, x_2, x_3\ , xn)\ =\ 200$$

المشكلة رقم(3) **Problem no.(3)**

إحدى المنشآت الإنتاجية متخصصة بصنع أربعة أنواع من المنتجات الغذائية وهي D, C, B, A وذلك باستخدام ثلاثة خطوط إنتاجية وهي الخط O_1، الخط O_2 والخط O_3. إن الوقت الذي يستغرقه صنع كل واحد من المنتجات الأربعة المذكورة أعلاه على كل خط إنتاجي موضحة في الجدول التالي:

المنتجات / الخطوط الإنتاجية	وقت استغراق الوحدة الواحدة في الإنتاج محسوبا بالساعات			
	A.	**B.**	**C.**	**D.**
الخط O_1	1.0	0.0	1.5	D.
الخط O_2	O_2	0.0	3.0	1.0
الخط O_3	1.5	2.0	0.0	1.5

الربح المتوقع من بيع الوحدة الواحدة من كل منتج هو:

A. ⇐ 3.0 دينار

B. ⇐ 1.5 دينار

C. ⇐ 4.0 دينار

D. ⇐ 3.5 دينار

إن الطاقة التشغيلية لكل واحد من الخطوط الإنتاجية المحسوبة بالساعات هي كما يلي:

الخط O_1 ⇐ 210 ساعة تماما.

الخط O_2 ⇐ على الأقل 100 ساعة.

الخط O_3 ⇐ على الأقل 200 ساعة.

ما هي كمية ونوعية المنتجات التي تجعل من الأرباح الكلية أعلى ما يمكن.

النتائج النهائية:

$X_1 = x_4 = 0 \quad , x_2 = 100 \quad , x_3 = 140$

$F(x_1, x_2, x_3, xn) = 25800$

المشكلة رقم (4) **Problem no.(4)**

إحدى الحقول الزراعية المتخصصة بتربية الدواجن لـديها مجموعـات مـن الـدواجن موزعة بين ثلاث مواقع (S_1, S_2, S_3). وقد علمت أن لهذه الحقول الإمكانيات التالية:

1- مجموعة محددة من العاملين (R).

2- كميات محددة من ثلاثة أنواع من الإعلان P_1, P_2, P_3.

3- طاقة إنتاجية محددة من مكائن تهيئة وتحضير الإعلان M_1, M_2.

وقد توفرت لديك البيانات التالية عن هذه المشكلة:

المستلزمات المطلوبة	استهلاك مستلزمات الإنتاج بالقياس إلى 1 كغم زيادة في الوزن			مقدار المتوفر من المستلزمات المطلوبة
	S_1	S_2	S_3	
R	10	8	8	80 000 000
P_1	20	30	20	600 000
P_2	10	20	30	600 000
P_3	40	60	80	1200 0000
M_1	3	3	2	300 000
M_2	2	1	4	400 000

المطلوب: تحديد خطة الإنتاج المثلى لطرح لحوم الدواجن، وقد علمت أن الربح المتوقع من زيادة وزن لحوم الدواجن 1 كغم هو كما يلي:

0.9 دينار بالنسبة للموقع الأول S_1

2.2 دينار بالنسبة للموقع الثاني S_2

1.2 دينار بالنسبة للموقع الثالث S_3

ما هي أعلى قيمة متوقعة للأرباح الكلية؟

النتائج النهائية:

$S_1 \Rightarrow x_1 = 3000$

$S_2 \Rightarrow x_2 = 0$

$S_3 \Rightarrow x_3 = 0$

دالة الهدف $Z \Leftarrow 27000$

المشكلة رقم (5) **Problem no.(5)**

إحدى المنشآت الإنتاجية تخصصت في إنتاج نوعين من المنتجات W_1, W_2 وكانت هناك مشكلة تتعلق بمحدودية ساعات العمل المتاحة لاثنين من المكائن وهي R_1, R_2. البيانات المتعلقة بالمشكلة هي كما في الجدول التالي:

المكائن	عدد ساعات العمل المصروفة على وحدة واحدة من المنتوج		أقصى وقت عمل ممكن (الطاقة المتاحة)
	W_1	W_2	
الماكنة R_1	2	1	12 ساعة
الماكنة R_2	2	2	20 ساعة

بالإضافة إلى ما تقدم من بيانات، قد علمت ما يلي:

- سعر بيع المنتج الأول W_1 يبلغ 50 دينار.
- سعر بيع المنتج الثاني W_2 يبلغ 75 دينار.
- من خلال دراسة وتحليل السوق اتضح أن كمية الإنتاج من المنتج W_1 ينبغي أن يكون 2.5 من أكثر من كمية الإنتاج للمنتج W_2.

المطلوب:

1- صياغة النموذج الرياضي للمشكلة.
2- وضع خطة الإنتاج المثلى.
3- هل يحصل تغيير في صيغة الحل النهائي إذا تم تخفيض سعر بيع المنـتج W2 إلى 45 دينار؟

النتائج النهائية:

X_1 كمية المنتج الأول (w_1) $\Leftarrow$ 5

X_2 كمية المنتج الثاني (w_2) $\Leftarrow$ 2

دالة الهدف (الإيرادات الكلية) F أو (z) $\Leftarrow$ 400 دينار

المشكلة رقم(6) **Problem no.(6)**

منشأة متخصصة بطرح نوعين من المنتجات w_2, w_1 تستخدم لهـذا الغـرض عـدد مـن مستلزمات الإنتاج، ومن بين ذلـك المـواد الأوليـة s_2, s_1، البيانـات المتعلقـة بهـذه المشـكلة موضحة كما في الجدول التالي:

استهلاك المواد الأولية / المنتجات	استهلاك المواد الأولية لكل واحدة من المنتجات		الأرباح المتوقعة من بيع الوحدة الواحدة من المنتجات
	S_1 المادة الأولية الأولى	S_2 المادة الأولية الثانية	
W_1	12	8	50
W_2	4	8	10
مقدار المتوفر من المواد الأولية	480	640	

المطلوب:

1- كم من المفروض أن تنتج هذه المنشأة من w_2, w_1 دون أن يتم التجاوز لما هو متـوفر من مواد أولية، وفي نفس الوقت العمل على تعظيم الأرباح، يضاف إلى ما تقدم من القيود أو الشروط أدخل قيمة جديدة يتعلق بكمية الإنتاج من w_1 التي ينبغي أن لا يتجاوز w_2.

2- ولو تم إدخال مادة أولية ثالثة في الإنتاج وهي S_3. المتوفر منها هـو 350 وحـدة وقـد تم استخدامه بالكامل، بحيـث مـا يحتاجـه المنـتج w_1 5 وحـدة والمنـتج الثـاني w_2 7 وحدة، وهل هذا القرار سوف يغير من طبيعة خطة الإنتاج المثلى؟

النتائج النهائية:

أولا:

$x_1 \Leftarrow 30$

$x_2 \Leftarrow 30$

$Z\ (F) \Leftarrow 1800$

ثانيا:

تتغير مجموعة الحلول الممكنة التي يتم الحصول عليها فيما لو تم إدخال القيمة الجديدة $5x_1 + 7x_2 = 350$ والواقع بين النقاط (0.50) ، (30.30)، وعندها تصبح نقطة الحل الأمثل هي:

$$\left(29\ \frac{1}{2}\ ,\ 29\frac{1}{6}\right)$$

المشكلة رقم(7) **Problem no.(7)**

إحدى المنشآت الإنتاجية متخصصة بطرح نوعين من المنتجات وهي L,K، وتستخدم لهذا الغرض عدد من مستلزمات الإنتاج، إلا أن هناك اثنين منها محددة الكمية وذلك ما يلي:

المتوفر من المادة الأولية .I ⇐ 96000 وحدة

المتوفر من المادة الأولية .II ⇐ 56000 وحدة

استهلاك هذه المواد بالنسبة لكل وحدة واحدة من الإنتاج موضحة كما في الجدول التالي:

استهلاك المواد الأولية / المواد الأولية	مقدار استهلاك المواد الأولية لكل وحدة واحدة من المنتوج L, K	
	المنتج الأول .K	المنتج الثاني .L
I.	8	16
II.	7	4

وقد علمت ما يلي:

1- مقدار ما هو متوفر من المادة الأولية .I والمادة الأولية .II هو 5000 وحدة و 4000 وحدة على التوالي.

2- إن ربح الوحدة الواحدة من المنتج الأول K هو 2 دينار وللمنتج الثاني هو 4 دينار.

المطلوب:

1- بناء النموذج الرياضي للمشكلة.

2- ما هو أكبر ربح ممكن الحصول عليه وما هو كمية الإنتاج من المنتج الأول.K والمنتج الثاني .L.

النتائج النهائية:

إن لهذه المشكلة عدد غير محدود من الحلول المثلى تقع على أطراف منطقة الحلول الممكنة البعيدة نختار منها النقطتين التاليتين:

(3500 , 5000) و (4000, 4000)، وفي ظل هذه القيم للمتغيرات تكون دالة الهدف التي تعبر عن الأرباح الكلية كما يلي:

F (x) = 24000 دينار

المشكلة رقم(8) **Problem no.(8)**

منشأة إنتاجية تطرح نوعين من المنتجات، حيث يتم تصنيع هذه المنتجات باستخدام إثنين من الخطوط الإنتاجية والماكنة F محدد كما هو واضح في الجدول التالي:

المنتجات / المكائن	مقدار ما يتم استهلاكه من وقت العمل محسوبا بالساعات على كل نوع من المنتجات		مقدار الوقت المتاح محسوب بالساعات
	المنتج No.1	المنتج No. 2	
الخط الإنتاجي O_1	3	1	18000
الخط الإنتاجي O_2	2	4	40000
الماكنة F	3	2	24000

الربح المتوقع من بيع المنتجات هي كما يلي:

1- المنتج No.1 $\Leftarrow$ 6 وحدة نقدية

2- المنتج No.2 $\Leftarrow$ 4 وحدة نقدية

المطلوب

1- ما هي كمية الإنتاج من النوع الأول والثاني بحيث تجعل الأرباح أعلى ما يمكن.

2- هل أن الحل الأمثل الذي يتم الحصول عليه سوف يتغير فيما لو:

أ- حصلت زيادة في الأرباح بمقدار وحدة واحدة لكل من المنتج No.1 والمنتج No.2.

ب- لو تم إضافة قيمة يتم بموجبه طرح المنتج No.2 بمقدار 1.5 أكثر من المنتج No.1.

النتائج النهائية:

1. الحل الأمثل الذي يتم الحصول عليه محصور بين النقاط:

(2000, 9000) , (4000, 6000)

وإن الربح الأمثل وهو أعلى مقدار من الأرباح يبلغ 48000 وحدة نقدية.

.2

$$x_1 = 2000 \ , x_2 = 9000$$

$$x_1 = 4000 \ , \ x_2 = 6000$$

المشكلة رقم(9) **Problem no.(9)**

إحدى المنشآت الإنتاجية ترغب في صنع ثلاثة منتجات A,B,C يتم استخدام نوعين من المواد الأولية لهذا الغرض كما هو واضح في الجدول التالي:

المنتجات / المواد الأولية	استهلاك المنتجات للمواد الأولية			مقدار المتوفر من المواد الأولية
	A	B	C	
المادة الأولى I	$\frac{3}{2}$	3	4	1500 كغم
المادة الثانية II	3	2	1	1200 كغم

الربح المتوقع من بيع المنتج A 12 دينار والمنتج .B 18 دينار والمنتج .C 12 دينار.

المطلوب:

1- ما هي كمية الإنتاج من C, B, A الذي يجعل من الأرباح أعلى ما يمكن.

2- ما هي الصيغة الرياضية الأولية لنموذج المشكلة، واكتب الصيغة المقابلة ومن ثم حل المشكلة بطريقة الرسم.

3- ما هي قيمة دالة الهدف.

النتائج النهائية:

$y_1 = 5 \quad , y_2 = 1.5 \quad , \; w = 9300$

$x_1 = 100 \; , \; x_2 = 450, x_3 = 0$

$F = 9300$

المشكلة رقم(10) **Problem no.(10)**

منشأة إنتاجية ترغب بطرح ثلاث أنواع من المنتجات هي w_1, w_2, w_3 وذلك باستخدام نوعين من المواد الأولية s_2,s_1 البيانات المتعلقة بهذه المشكلة موضحة بالجدول التالي:

المنتجات / المواد الأولية	استهلاك المواد الأولية من المنتجات			مقدار المتوفر من المواد الأولية
	W_1	W_2	W_3	
S_1	5	3	0	3600 كغم
S_2	1	2	4	4800 كغم
الربح المتوقع	10	24	12	

المطلوب:

1- حل المشكلة وتحديد كمية الإنتاج من كل نوع ومقدار الربح المتوقع الأعظم.

2- حول المشكلة إلى الصيغة الثنائية وأوجد النتائج النهائية.

النتائج النهائية:

y1 = 6 y2 = 3 w = 3600

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1200 \\ x_3 = 600 \end{array}\right\} \quad F = 3600$$

المشكلة رقم(11) **Problem no.(11)**

توفر لديك النموذج الرياضي التالي الذي يعبر عن إحدى المشاكل الإنتاجية:

(1)	x_1	+	x_2	$\leq$	12000
(2)	$-x_1$	+	$2x_2$	$\geq$	2000
(3)	$2x_1$	+	$2x_2$	$\geq$	18000
(4)	$-2x_1$	+	$3x_2$	$\leq$	6000
(5)	3000	$\leq$	x_1	$\leq$	7000
(6)	4000	$\leq$	x_2	$\leq$	8000

(7) $F(x_1, x_2) = 20x_1 + 30x_2 \rightarrow$ Max.

$x_1, x_2 \geq 0$

وقد علمت ما يلي:

1- معاملات دالة الهدف 20 , 30 تمثل أسعار بيع المنتجات الأول والثاني.

2- يمكن أن يحصل تغييرات في أسعار البيع بحيث أن زيادة سعر بيع المنتج الأول بمقدار 10 وحدة نقدية يؤدي إلى تخفيض سعر بيع المنتج الثاني بمقدار 10 وحدة نقدية وبالعكس.

المطلوب:

1- حل المشكلة المذكورة مع بيان ما هو السعر الملائم.

2- هل أن التغيير في السعر سوف يتبعه تغيير في هيكل الإنتاج.

النتائج النهائية:

(1) $\begin{cases} x_1 = 6000 \quad , \quad x_2 = 6000 \\ F(x_1, x_2) = 300000 \\ C_1 = 30 , C_2 = 20 \end{cases}$ السعر الملائم هو:

(2) تغيير السعر سوف يتبعه في هيكل الإنتاج

المشكلة رقم(12) **Problem no(12)**

توفرت البيانات التالية عن خطة إنتاج لطرح أربعة أنواع مختلفة من المنتجات كـما هو واضح في الجدول التالي:

المنتجات / المواد الأولية	استهلاك المواد الأولية من المنتجات				المتوفر من المواد الأولية (كغم)
	A.	**B.**	**C.**	**D.**	
S_1	0.5	0.4	0.4	0.2	2000
S_2	0.4	0.2	0	0.5	2800
الأسعار	10	14	8	11	

المطلوب:

1- أوجد الحل الأمثل لهذه المشكلة.

2- أوجد النموذج والحل المقابل.

النتائج النهائية:

$y_1 = 30$, $y_2 = 10$, $w(y_1, y_2) = 88000$

$x_1 = x3 = 0$

$x_2 = 2750$

$x_4 = 4500$

$F(x_1, x_2, x_3, xn) = 88000$

2.2 تحديد مزيج مكونات الإنتاج (التغذية)

في هذا النوع من المشاكل المطلوب هو تصغير دالة (Min.F.)، حيث أن الدالة في هذه الحالة تعبر عن تكاليف الإنتاج وبالتحديد تكاليف استهلاك المكونات ويضاف إلى ذلك أيضا تكاليف استخدام المكائن والمعدات والأيدي العاملة وما إلى ذلك. وأفضل مثال على هكذا نوع من المشاكل هو ما يسمى بمشاكل التغذية، حيث أن الأهداف المطلوب في هذه الحالة هي:

1- تدنية تكاليف عملية مزج مكونات الإنتاج إلى أقل ما يمكن.

2- تعظيم مكونات المنتجات مثل (السعرات الحرارية، الفيتامينات، الدهون، القيمة الغذائية وما إلى ذلك) حيث يتم استهلاك هذه المنتجات من قبل العنصر البشري.

ومن أجل توضيح الصيغة الرياضية لهكذا نوع من المشاكل، نفرض ما يلي:

1- لدينا n من المنتجات الغذائية يدخل فيها r من المكونات.

2- وقد علمت أن

a_{ij} ⇐ مقدار (i) من المكونات الداخلة في تركيب (j) من المنتجات حيث أن: $(i = 1,2,\dots,r)$ $(j=1,2,\dots,n)$

b_i ⇐ مقدار المكونات من النوع (i) الذي يفترض أن تصل إلى المستهلك بأكبر مقدار ممكن. $(i= 1,2,\dots r)$.

c_j ⇐ تكاليف إنتاج (j) من المنتجات $(j= 1,2,\dots,n)$

d_j ⇐ أقل مقدار ممكن من (j) من المنتجات يفترض أن يستخدمه المستهلك.

g_i ⇐ أكبر مقدار ممكن من المنتجات يمكن أن يستفيد منه المستهلك

x_j ⇐ كمية الإنتاج من النوع (j) الذي ينبغي شراءه أو الحصول عليه. $(j = 1,2,\dots,n)$

في المشكلة السابقة يتم التركيز على المتغير الأساسي وهو xj الذي يمثل كمية الإنتاج من النوع (j) الذي ينبغي شراءه أو الحصول عليه بحيث تحتوي هذه الكمية أكبر مقدار ممكن من المكونات المطلوبة من قبل المستهلك وبأقل تكاليف إنتاج كلية ممكنة. ويمكن عرض هذه المشكلة على النحو التالي:

$$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_1 n\ xn\ \geq b_1$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_{r1}\ x_1 + a_{r2} x_2 + \ldots + arn\ xn\ \geq\ br$$

$dj\ \leq\ gj$ لكافة قيم (j)

$F = c_1\ x_1\ + c_2\ x_2 + \ldots + c_n x_n \rightarrow Min$

$x_1\ , x_2\ , \ldots\ , xn \geq 0$

إن حل هكذا نوع من النماذج الرياضية يساعد متخذ القرار في اختيار تلك الأنواع من مكونات الإنتاج التي تؤدي إلى تخفيض أقصى ما يرغبه المستهلك من الفوائد الغذائية وبأقل كلفة ممكنة.

ولتوضيح هذه الفكرة نأخذ أدناه أحد الأمثلة العملية.

مثال رقم ❶

إحدى المعامل المتخصصة بضاعة الأعلاف الحيوانية، ترغب في طرح نوعين من هذه الأعلاف وذلك باستخدام ثلاثة أنواع من المكونات وهي: s3, s2, s1 وأن كل واحد من هذه المكونات يساهم في تقديم مقدار معين من القيمة الغذائية التي من شأنها أن تدعم حالة النمو وزيادة السمنة لدى الحيوانات التي تستهلكه.

البيانات المتعلقة بكمية هذه المكونات الداخلة في الوحدة الواحدة من منتوج العلف وأقل مستوى ممكن أن يتواجد في العلف من المكونات وتكاليف الإنتاج موضحة بالجدول التالي:

أقل مستوى ممكن القبول به من المكونات	مقدار استهلاك المكونات للوحدة الواحدة من العلف		الأعلاف / المكائن
	P2	**P1**	
27	9	3	S_1
32	4	8	S_2
36	3	12	S_3
	9	6	التكاليف

المطلوب:

1- صياغة النموذج الرياضي للمشكلة.

2- ما هـي كميـة العلـف في p2, P1 الواجـب إنتاجهـا بحيـث تكـون هـذه الكميـة محتوية على أكبر قدر ممكن من المكونات S3, S2, S1.

3- التكاليف الكلية للإنتاج أقل ما يمكن.

الحل:

من أجل البدء بعملية الحل نضع الفرضيات التالية:

x_1 ⇐ كمية العلف من النوع P_1 الواجب شرائها

x_2 ⇐ كمية العلف من النوع P_2 الواجب شرائها

وعليه فإن صيغة النموذج الرياضية لهذه المشكلة هي:

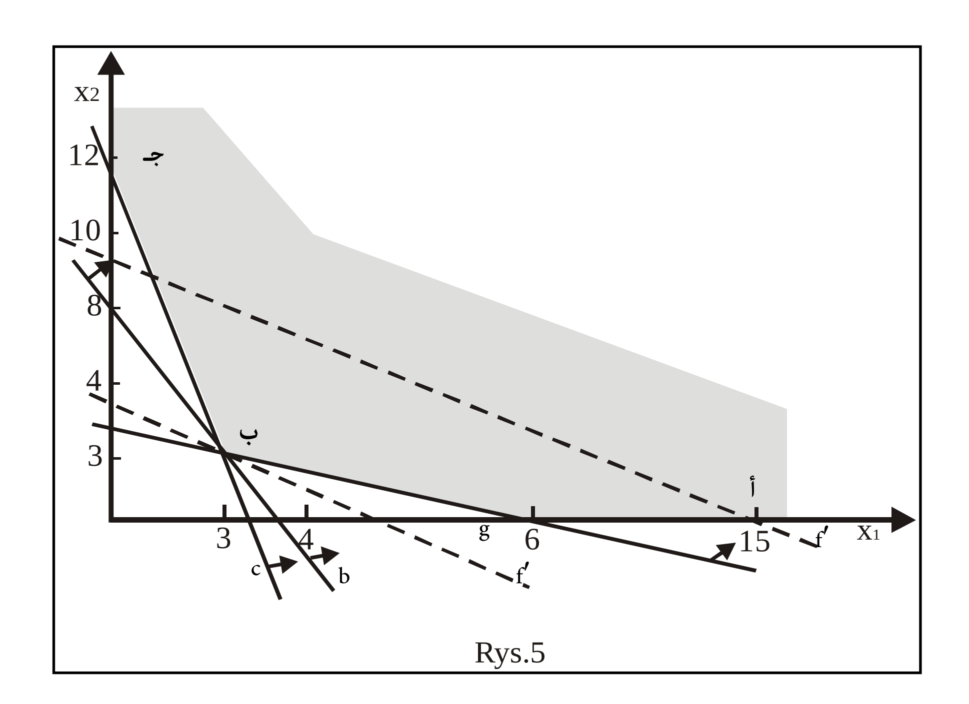
(1) $3x_1 + 9x_2 \geq 27$

(2) $8x_1 + 4x_2 \geq 32$

(3) $12x_1 + 3x_2 \geq 6$

(4) $x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0$

(5) $F(x_1,x_2) = 6x_1 + 9x_2 \rightarrow Min.$



Rys.5

من الشكل السابق Rys.5 يتضح أن منطقة الحلول الممكنة تقع إلى خارج الشكل البياني، وقد تم رسم المستقيم الذي يعبر عن دالة الهدف على أساس تحديد قيمة افتراضية لدالة الهدف (F=90) ولذلك فإن دالة الهدف التي يتم رسمها هي:

$$6x_1\ 9x_2 = 90$$

إن هذا المستقيم يقطع المحور x1 في النقطة $\left(\frac{90}{6}=15\right)$، بينما يقطع المحور x2 في النقطة $\left(\frac{90}{9}=10\right)$، ومن تحريك هذا المستقيم باتجاه نقطة الأصل (0,0)، من خلال رسم مستقيمات متوازية، لمستقيم معادلة دالة الهدف، فإن ذلك سوف يثبت أن النقطة (ب) هي التي عندها الحل الأمثل، وإحداثيات هذه النقطة هي (3,2)، أي أن:

$$X_1 = 3$$
$$X_2 = 3$$

وبالتعويض في معادلة دالة الهدف السابقة (رقم 5)، نحصل على ما يلي:

$$6\ (3) + 9(2) = 36$$

أي أن أقل كلفة كلية ممكنة هو 36 وحدة نقدية:

مثال رقم ❷

توفرت لديك البيانات التالية التي تتعلـق بإحـدى مشـاكل مـزيج مكونـات الإنتـاج بخصوص نوع معين من الأعلاف، وذلك كما في الجدول التالي:

فوائد الأعلاف / المكونات	مقدار استخدام مكونات الإنتاج للوحدة الواحدة من العلف		مقدار المطلوب
	P_1	P_2	
A.	3	3	60
B.	10	4	40
C.	6	9	36
سعر الشراء	9	18	

حيث أن المطلوب من المكونات هو:

A. ⇐ على الأقل 60

B. ⇐ على الأكثر 40

C. ⇐ على الأكثر 36

وقد علمت أن المطلوب من النوع p1 من العلف على الأقل 10 وحدة.

المطلوب: ما هي كمية الأعلاف الواجب شرائها بحيث تكون تكاليف الشراء أقـل مـا يمكن وأن مقدار القيمة الغذائية هي أعلى ما يمكن.

الحل:

في البداية يتم وضع الفرضيات التالية:

X_1 ⇐ كمية العلف من النوع P_1 المطلوب شرائه

X_2 ⇐ كمية العلف من النوع P_2 المطلوب شرائه

إن الصيغة الرياضية الخاص بهذه المشكلة فهو كما يلي:

(1) $3x_1 + 3x_2 \geq 60$

(2) $10x_1 + 4x_2 \leq 40$

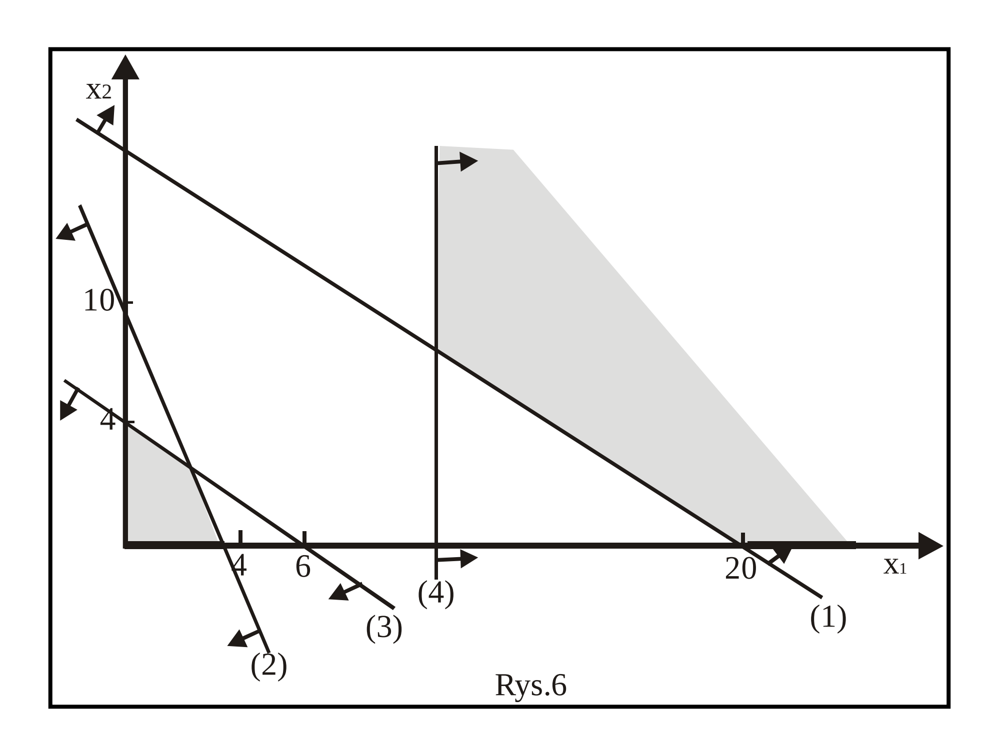
(3) $6x_1 + 9x_2 \leq 36$

(4) $x_1 \geq 10$

(5) $x_2 \geq 0$

(6) $F(x_1, x_2) = 9x_1 + 18x_2 \rightarrow Min.$

الشكل البياني الذي يعبر عن هذه الحالة هو كما يلي:



Rys.6

من الشكل Rys.6 يتضح أن منطقة الحلول غير واضحة، وبعبارة أخرى لا توجد منطقة حلول واحدة تجمع كافة المستقيمات أو العلاقات الرياضية الخاصة بالمشكلة، لذلك في حقيقة الأمر لا يوجد حل لهذا النموذج الرياضي وكذلك المشكلة.

مشاكل مختلفة حول تحديد مزيج
مكونات الإنتاج (التغذية)

مشكلة رقم (1) **Problem no. (1)**

طفل في عمر معين يحتاج إلى نظام تغذية محدد أسبوعيا وذلك على أقل تقدير كما يلي:

- 120 وحدة من فيتامين .A
- 60 وحدة من فيتامين .D
- 36 وحدة من فيتامين .C
- 180 وحدة من فيتامين .E

إن هذه الفيتامينات من المفروض أن تتوفر في اثنين من المنتجات وهي P_2,P_1 ومن أجل تجنب الآثار الجانبية لهذه الفيتامينات تقرر أن يكون الحد الأعلى لما هو موجود منها في الأغذية هو 240 وحدة. البيانات المتعلقة بهذه المشكلة موضحة في الجدول التالي:

المنتجات / Vitamin	الفيتامينات لكل منتج		مقدار ما هو مطلوب
	P_1	P_2	
A.	6	3	≤ 240
D.	1	3	≥ 240
C.	9	1	≥ 240
E.	6	6	≥ 240
الأسعار	1.2	1.8	

المطلوب:

ما هي كمية الإنتاج من المادة الغذائية P_1 والمادة الغذائية P_2 الواجب شرائها لتغذية الطفل بحيث يكون مقدار الفيتامينات المطلوبة التي يحصل عليها الطفل أعلى ما يمكن وبأقل كلفة كلية ممكنة.

النتائج النهائية:

$x_1 = x_2 = 15$

$F(x_1, x_2) = 45$

مشكلة رقم (2) **Problem no. (2)**

أحد المزارعين يملك أراضي زراعية تحتاج إلى عملية تسميد التي من شأنها أن ترفع من مستوى الخصوبة والإنتاجية، الأسمدة التي تستخدم هي على ثلاثة أنواع، وهي: فوسفاتي، بوتاسي، طبيعي، إن هذه الأسمدة تحتوي على أربعة هي المكونات محسوبة لكل واحد كيلو غرام، كما هو واضح من الجدول التالي:

الأسمدة / المكونات	المكونات من كل نوع من الأسمدة			المطلوب من المكونات
	فوسفاتي	بوتاسي	طبيعي	
A.	6	2	26	96
B.	40	4	20	160
C.	3	20	60	120
D.	18	12	13	152
التكاليف (1كغم)	5	6	2	

المطلوب: حل هذه المشكلة وأوجد مقدار ما هو مطلوب شراءه من الأسمدة بحيث تكون مقدار المكونات الداخلة إلى التربة أكبر ما يمكن وتكاليف شراء الأسمدة أقل ما يمكن علما بأن نسبة استخدام الأسمدة هي:

1: 0 , 5:4

النتائج النهائية:

$x_1 = 2$, $x_2 = 15$, $x_3 = 8$

$F(x_1, x_2, x_3) = 32$

مشكلة رقم (3) **Problem no. (3)**

شركة نفطية لديها مصفى لتكرير وإنتاج المشتقات النفطية المختلفة، تشتري هذه الشركة نوعين من خامات النفط وهي R_1, R_2 مقابل الأسعار 14,7 لكل وحدة واحدة، ومن هذه الخامات يتم طرح عدد من المنتجات وذلك كما هو واضح في الجدول التالي:

الخامات / المنتجات	الفيتامينات لكل منتج		مقدار ما هو مطلوب
	R_1	R_2	
البانزين	16	48	48000
الزيوت	20	10	2000
دهون	24	14	76000
الأسعار	7	14	

حيث أن: 48000 + 2000 + 76000 = 144000

المطلوب:

1- ما هي كمية الخامات R2, R1 الواجب شرائها لهذا الغرض.

2- حل النموذج بالطريقة البيانية.

3- أوجد نسبة استخدام الطاقة الإنتاجية للمصفى على أساس ما تم شرائه من خامات.

النتائج النهائية:

$x_1 = 600$

$x_2 = 800$

$F(x_1, x_2) = 15400$

يتم استخدام الطاقة الإنتاجية بحدود 65%

مشكلة رقم (4) **Problem mo.(4)**

أحد الأشخاص الرياضيين يحتاج إلى ثلاثة أنواع من الفيتامينات وهـي C, B, A وذلـك بمقدار على أق تقدير كما يلي:

5000 وحدة من فيتامين A

1.4 وحدة من فيتامين B

75 وحدة من فيتامين C

إن هذه الفيتامينات تتواجد في أربعـة أنـواع مـن الغـذاء وبمقـادير معينـة محـددة بالإضافة إلى كلفة كل واحد كغم من هذه الأغذية وكما هو وارد في الجدول التالي:

الأغذية / الفيتامينات	مقدار الفيتامينات من الأغذية				المطلوب من الفيتامينات
	دجاج	سمك	حليب	خبز	
A.	2500	10200	1400	-	5000
D.	0.6	0.3	0.5	3	1,4
C.	-	10	10	-	75
سعر 1 كغم	5.4	4.0	0.7	1.0	

المطلوب:

ما هـو مقـدار مـا ينبغـي شراءه مـن الأغذيـة خـلال 10 أيـام حتـى يكـون مجمـوع الفيتامينات المأخوذة أكبر ما يمكن وبأقل كلفة كلية ممكنة.

النتائج النهائية:

$x_1 =$ $x_2 =$, $x_4=0$

$x_3 = 75$

$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 52.5$

مشكلة رقم(5) **Problem no.(5)**

إحدى حقول الدواجن يتم تجهيزها بأربعة أنواع من العلف، وقد تم الاشتراط على أن تحتوي هذه الأعلاف ثلاثة أنواع من المكونات هي C, B, A بمقادير معينة وأن الحدود الواجب الالتزام بها هي كما يلي:

A ⇐ على الأقل 1000 وحدة

B ⇐ على الأقل 800 وحدة

C ⇐ على الأقل 1150 وحدة ولا يزيد عن 1700 وحدة

البيانات المتعلقة بهذه المشكلة موضحة في الجدول التالي:

سعر الشراء	المكونات			الأعلاف
	C.	B.	A.	
180	10	20	50	I
220	30	0	20	II
130	10	20	30	III
150	20	10	0	IV

وقد علمت ما يلي:

1- العلف من النوع II لا ينبغي أن يكون أقل من 20 طن سنويا.

2- العلف من النوع I ينبغي أن يكون 1.5 من أكبر من كمية العلف من النوع III.

3- لا ينبغي استلام أكثر من 30 طن من النوع IV سنويا.

المطلوب: ما هي كمية الأعلاف الواجب شرائها بحيث تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن وتحتوي على أكبر قدر ممكن من المكونات.

النتائج النهائية:

$x_1 = z_1$, $x_2 = 20$, $x_3=14$, $x_4 = 10$

$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1150$

مشكلة رقم(6) **Problem no. (6)**

إحدى المنشآت الزراعية تملك أنواع مـن الـدواجن تسـتهلك نـوعين مـن الأعـلاف ويـدخل في تركيب هذه الأعلاف ثلاثة أنواع من المكونات كما هو واضح في الجدول التالي:

المكونات	نوع الأعلاف	
	I.	II.
A.	0.500	0.250
B.	0.100	0.030
C.	0.010	0.010

وقد علمت ما يلي:

1- كلفة شراء 1 كغم من العلف I هو 5 دينار.

2- كلفة شراء 1 كغم من العلف II هو 2.5 دينار.

3- مقدار ما هو مطلوب من المحتويات يوميا:

A. ⇐ على الأقل 3 كغم

B. ⇐ على الأقل 0.5 كغم

C. ⇐ لا يزيد عن 25 كغم

المطلوب:

1- حل المشكلة بيانيا.

2- هل يتغير الحل لو تم رفع سعر العلف II إلى 5 دينار.

3- ما هي أقل قيمة لدالة الهدف بحيث يتم عندها الإيفاء بالمتطلبات الواردة أعلاه.

النتائج النهائية:

$$x_1 = \frac{150}{7} \quad , \quad x_2 = \frac{200}{7}$$

$$F(x_1, x_2) = \frac{1250}{7}$$

في حالة زيادة سعر شراء العلف .II، فإن الحل الأمثل أعـلاه سـوف يتغـير، ومـن بين ذلك القيم التالية:

$x_1 = 50$, $x_2 = 0$

$F(x_1, x_2) = 250$

مشكلة رقم(7) **Problem no.** (7)

توفرت لديك البيانات التالية عن عملية خلط ثلاثة أنواع من المكونات:

المكونات	استخدام المكونات في صناعة الأعلاف	
	العلف P_1	العلف P_2
S_1	0.04	0.12
S_2	0.14	0.07
S_3	0.10	0.10

وقد علمت ما يلي:

1- المطلوب من S_1 هو 24 كغم.
S_2 هو 45 كغم
S_3 هو لا يتجاوز المقدار 70 كغم.

2- مقدار التجهيز اليومي للعلف هو 500 كغم.

3- 1 كغم من العلف p_1 يكلف 6 دولار.
1 كغم من العلف p_2 يكلف 3 دولار.

المطلوب:

1- بناء النموذج الرياضي للمشكلة.

2- حل المشكلة بالطريقة البيانية.

3- تحديد منطقة الحلول الممكنة.

4- ما هي قيمة دالة الهدف المثلى (Min.F.).

5- هل من الناحية الاقتصادية مجديا تغيير ما يلي:
كلفة p_1 إلى 3 دولار.
كلفة p_2 إلى 6 دولار.

النتائج النهائية:

$x_1 = 200 ,\ x_2 = 300 ,\ F(x_1 , x_2) = 2100$

وفي حالة التغيير:

$x_1 = 450 ,\ x_2 = 50 ,\ F(x_1, x_2) = 1650$

مشكلة رقم(8) **Problem no. (8)**

نوعين من الأعلاف p_1, p_2 تحتاج إلى مزج ثلاثة مكونات كما هو وارد في الجدول التالي:

الأعلاف	المكونات لكل 1 كغم من العلف			سعر العلف
	S_1	S_2	S_3	
P_1	2	10	5	3
P_2	7	2.5	4	9

وقد علمت ما يلي:

1- المطلوب من المكونات كما يلي:
   - $S_1 \Leftarrow$ على الأقل 28 وحدة
   - $S_2 \Leftarrow$ على الأقل 50 وحدة
   - $S_3 \Leftarrow$ على الأقل 60 وحدة
2- كم من الأعلاف p_1, p_2 تم شراء بحيث تكون كمية المكونات المأخوذة من قبل الحيوانات أكبر ما يمكن.
3- متى تكون الكلفة الكلية أقل ما يمكن.
4- أي المكونات يتم أخذها بأقل ما يمكن.
5- هل أن تركيبة مكونات التغذية المثلى سوف تتغير لو أن العلف من النوع p_1 يتم تجهزه بكميات y تقل عن كميات p_2، إذا كان الجواب بنعم، هل أن هذا التغيير مجدي من الناحية الاقتصادية.

النتائج النهائية:

$x_1 = 4$, $x_2 = 4$ (المطلوب رقم 2)

$F(x_1, x_2) = 48$ (المطلوب رقم 3)

نعم العنصر S_2 (المطلوب رقم 4)

$x_1 = \frac{56}{13}$, $x_2 = \frac{36}{13}$, $F(x_1, x) = \frac{492}{13} = 37.85$ (المطلوب رقم 4)

وأن تغيير السعر مجدي من الناحية الاقتصادية

مشكلة رقم(9) **Problem no. (9)**

إحدى المكائن التي تنتج ثلاثة أنـواع مـن الزيـوت النباتيـة، التـي يـدخل في تركيبهـا أربعة أنواع من المكونات كما هو واضح في الجدول التالي:

الأنواع	المكونات لكل 1 كغم من العلف				سعر العلف
	C	Si	Mn	P	
I	28	10	30	10	100
II	14	12	20	10	50
III	10	6	30	15	200

وقد علمت ما يلي:

نسب نقاوة المكونات هي:

C ⇐ أكثر من 14%

Si ⇐ لا يزيد على 8%

Mn ⇐ على الأقل 25%

P ⇐ على الأقل 12%

المطلوب: ما هي كمية الإنتاج من كل نوع بحيث تكـون التكـاليف الكليـة أقـل مـا يمكن. مع العلم أن المطلوب هو 3000 وحدة.

النتائج النهائية:

$x_1 = 0$, $x_2 = 1000$, $x_3 = 2000$

$F(x_1, x_2, x_3) = 450000$

مشكلة رقم(10) **Problem no. (10)**

توفرت لديك البيانات التالية التي تتعلق بعملية لخلط ثلاثة مكونـات لإنتـاج ثـلاث مواد غذائية.

المواد الغذائية	المكونات			سعر 1 كغم
	Si	Mn	P	
S_1	2.6	0.4	0.6	5 $
S_2	2.1	0.9	0.2	3 $
S_3	2.1	0.6	0.6	4 $

وقد علمت ما يلي:

1- المحتويات من المكونات:

Si ⇐ على الأقل 10.2 كغم

Mn ⇐ على الأقل 2.4 كغم

P ⇐ من 2.4← 4 كغم

2- الحفاظ على نسب العلاقة 1 كغم من S_1 – 2 كغم S3

المطلوب:

ما هي كمية المواد الغذائية التي ينبغي شرائها بحيث تكون التكاليف الكلية اقل ما يمكن مع أخذ أكبر قدر ممكن من المكونات.

النتائج النهائية:

$x_1 = 150$, $x_2 = 0$, $x_3 = 300$

$F(x_1, x_2, x_3) = 1950$

مشكلة رقم(11)　　　**Problem no. (11)**

نوعين من المواد الغذائية يدخل في تركيبها نوعين من المكونات وذلك كما هو واضح في الجدول التالي:

سعر شراء 1 طن بالدولار	مكونات المواد الغذائية		المواد الغذائية
	Po.	Fo.	
200	3	0.02	A.
160	5	0.05	B.

وقد علمت ما يلي:

1- لكل 90 طن من المواد الغذائية تكون الحاجة إلى:

Fo. ⇐ لا يزيد عن 0.03%

Po. ⇐ لا يزيد عن 4%

2- ما هي كمية المواد الغذائية B, A بحيث تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن.

النتائج النهائية:

$x_1 = 60 \quad , \quad x_2 = 30$

$F(x_1 , x_2) = 16800$

مشكلة رقم(12) **Problem no. (12)**

أربعة أنواع من الأعلاف (p_4, p_3, p_2, p_1) تتطلب خلط نوعين من المكونات كما هو واضح في الجدول التالي:

الأعلاف	المكونات لكل 1 كغم علف		سعر شراء 1 طن بالدولار $
	S_1	S_2	
P_1	0.8	0.6	9.6
P_2	2.4	0.6	14.4
P_3	0.9	0.3	10.8
P_4	0.4	0.3	7.2

وقد علمت ما يلي:

الكميات الواجب توفرها من S_2, S_1 لا تقل عن 1200 , 600 على التوالي.

المطلوب:

ما هي كمية الأعلاف الواجب تجهيزها بحيث تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن مع الحصول على أكبر قدر ممكن من المكونات S_1 ، S_2.

النتائج النهائية:

$x_1 = 750$, $x_2 = 250$, $x_3 = x_4 = 0$

$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 108000$

3.2 اختيار بدائل الإنتاج (القطع)

إن اختيار بدائل الإنتاج تعد من المهام الرئيسية التي تواجه متخذ القرار على مستوى إدارة الإنتاج وذلك بعد أن تتم عملية المفاضلة بين ما هو متوفر من بدائل لها نتائج مالية واقتصادية مختلفة، ولأجل توضيح فكرة عملية الاختيار هذه لا بد من اعتماد بيانات تتعلق بإحدى عمليات الإنتاج، حيث نفرض أن هناك منشأة إنتاجية ترغب في طرح r من المنتجات في الكميات $b_1, b_2, \dots, br$، من أجل طرح هذه الكميات من الإنتاج يمكن اعتماد n من بدائل عمليات الإنتاج.

النموذج الرياضي لهكذا نوع من المشاكل موضح كما هو وارد أدناه:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_1nxn \geq b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_2nxn \geq b_2 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
&ar_1x_1 + ar_2x_2 + \dots + ar_n xn \geq br \\
&x_1, x_2, \dots, xn \geq 0 \\
&c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + cn\, xn \longrightarrow Min.
\end{aligned}$$

إن هذا النموذج الرياضي مشابه للنموذج الرياضي الذي ورد في الفقرة السابقة المتعلقة بمشاكل مزيج مكونات الإنتاج (التغذية) إلا أن الاختلاف هنا هو أن المتغير الأساسي xj يعني عدد القطع التي يتم الحصول عليها باعتماد البديل من النوع $(j= 1,2,\dots,n)$. إن تطبيق هكذا نوع من النماذج الرياضية يمكن أن يتم في مجالات مختلفة من عمليات الإنتاج ومن أهمها ما يعرف باسم القطع (Trim Loss Problem) أو القص، أما بالنسبة للرمز cj فهو يعني تكاليف البديل (j)، والرمز aij يعني عدد مرات استخدام البديل j للحصول على الإنتاج من النوع (i). ولتوضيح فكرة هذا النموذج الرياضي نأخذ المثال التالي:

مثال رقم ❶

منشأة متخصصة بضاعة الموكيت والسجاد وقبول العروض الخاصة بعمليات فرش البيوت والعمارات السكنية والدوائر الحكومية والشركات. تم استلام مقاولة تتعلق بفرش عمارة سكنية بالموكيت تتكون بين 300 وحدة سكنية، علما بأن القطع المتوفرة هي بطول 5.2 (العرض ثابت).

كل وحدة سكنية تتطلب 7 قطع بطول 0.7 (الحجم .A).

4 قطع بطول 2.5 (الحجم .B)

بأي طريقة يمكن تنفيذ هذه المقاولة بحيث أن القطع التي تزيد عن الطول 5.2 المتبقية بعد القطع هو أقل ما يمكن.

الحل: في البداية يتم تنظيم الجدول التالي

أساليب قطع / الأحجام	أساليب القطع (القص)		
	الأسلوب .I	الأسلوب. II	الأسلوب .III
0.7 الحجم (A)	7	3	0
2.5 الحجم (B)	0	1	2
الفضلات (متر)	0.3	0.6	0.2

وقد علمت ما يلي:

1- المطلوب من الحجم .A هو على الأقل 2100 قطعة.

2- المطلوب من الحجم .B هو على الأقل 1200 قطعة.

من أجل صياغة النموذج الرياضي لهكذا مشكلة نضع الفرضيات التالية:

X_1 ⇐ عدد القطع التي يتم الحصول عليها بأسلوب القطع رقم (1)

$x_2 \Leftarrow$ عدد القطع التي يتم الحصول عليها بأسلوب القطع رقم (2)

$x_3 \Leftarrow$ عدد القطع التي يتم الحصول عليها بأسلوب القطع رقم (3)

وعليه فإن النموذج الرياضي لهكذا مشكلة هو كما يلي:

(1) $7x_1 + 3x_2 + 0x_3 \geq 2100$

(2) $x_2 + 2x_3 \geq 1200$

(3) $x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0 \ , x_3 \geq 0$

دالة الهدف تتعلق بتقليل التالف أو المتبقي بعد القص إلى أقل مقدار ممكن وعليه فإن:

(4) $F(x_1, x_2, x_3) = 0.3x_1 + 0.6x_2 + 0.2x_3 \rightarrow Min.$

ويمكن إعادة صياغة النموذج الرياضي أعلاه لكي يصبح كما يلي:

(1) $7x_1 + 3x_2 \geq 2100$

(2) $x_2 + 2x_3 \geq 1200$

(3) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(4) $F(x_1, x_2, x_3) = 0.3x_1 + 0.6x_2 + 0.2x_3 \rightarrow Min.$

إن النموذج الرياضي أعلاه يتكون من متغيرات قياس 2x3، وهو لا يمكن حله باستخدام الطريقة البيانية، لذلك يتم بناء النموذج المقابل له Dual والذي سوف يكون بقياس 3x2، ويصبح بمتغيرات y_1, y_2 وذلك كما يلي[1]:

(1) $7y_1 \leq 0.3$

(2) $3y_1 + y_2 \leq 0.6$

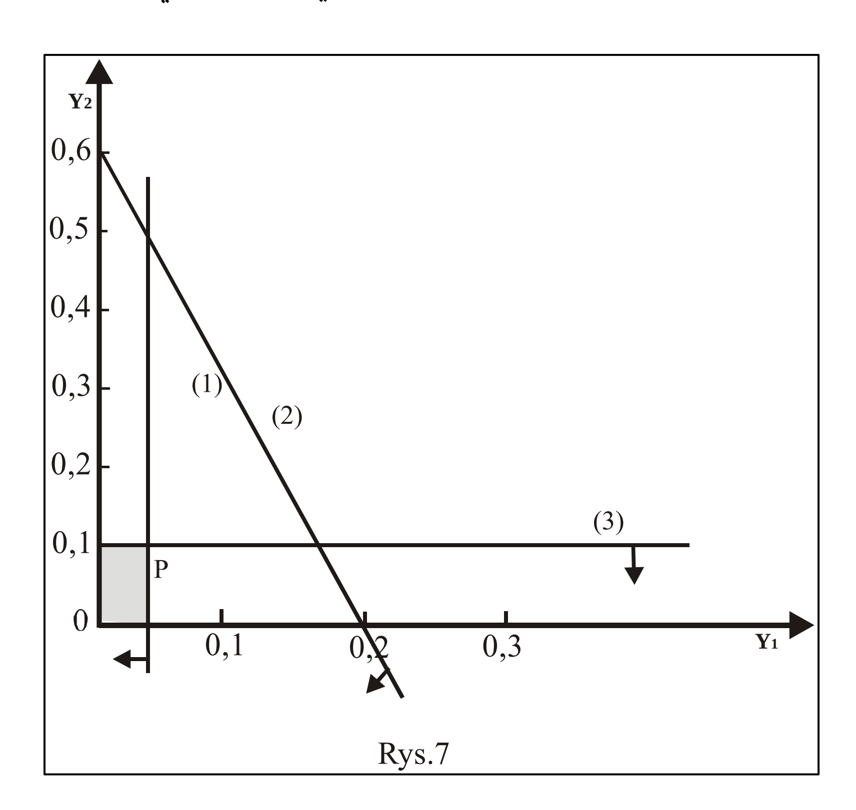
(3) $2y_2 \leq 0.2$

(4) $y_1, y_2 \leq 0$

(5) $w(y_1, y_2) = 2100y_1 + 1200y_2 \rightarrow Max.$

(1) راجع الفصل الرابع من كتابنا هذا للتعرف على قواعد تحويل النموذج الأولي إلى نموذج مقابل Dual.


إن حل هذه المشكلة بالطريقة البيانية هو كما في Rys.7 وكما يلي:



Rys.7

إن منطقة الحلول الممكنة في الرسم السابق ذات شكل رباعي، وأن نقطة الحل الأمثل تقع عند النقطة P، وعندها تكون قيمة $y_1 = \frac{3}{70}$, $y_2 = \frac{1}{10}$ وأن قيمة دالة الهدف المثلى هي:

$$w\,(y_1, y_2) = \frac{3}{70}\ 2100 + \frac{1}{10} 1200 = 210$$

ومن الجدير بالذكر أن القيم الواردة أعلاه تحقق القيود من (1, 3) بشكل ضعيف أما القيمة رقم 2 فإنه يحقق بشكل قوي.

إن الحل الأولي الذي يتم الحصول عليه هو كما يلي:

$x_1 = 300$, $x_2 = 0$ m $x_3 = 300$

وأن قيمة دالة الهدف هي:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0.3 \times 300 + 0.6 \times 0 + 0.2 \times 600 = 210$$

ويلاحظ من النتائج تساوي القيم

$$F(x_1, x_2, x_3)\ w(y_1, y_2) = 210$$

وهو يعني دقة عملية الحل وصحتها.

إن تحليل النتائج يعني استخدام طريقة القص .I بمقدار 300 مرة وعدم استخدام طريقة القص .II، والطريقة .III 600 مرة وبذلك تكون كمية الثالث أقل ما يمكن وهو 210 متر.

مثال رقم ❷

إحدى معامل الخياطة تعاقدت مع إحدى المدارس لتجهز الطلاب بنوعين من البدلات وهو الحجوم:

(0.5) الحجم الصغير

(1.4) الحجم الكبير

وقد توفرت قياسين من مصنع القماش لهذا الغرض وهي:

القياس الأول 2.1 متر

القياس الثاني 4.2 متر

وقد علمت أن المطلوب من الحجم الصغير هو 12000 قطعة، ومن الحجم الكبير 18000 قطعة. البيانات المتعلقة ببدائل القص والمتبقي من الفضلات موضحة كما في الجدول التالي:

الأحجام المطلوبة	**أساليب القطع**					
	القياس 2.1		**القياس 4.2**			
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
(0.5) الحجم الصغير	4	1	8	5	2	0
(1.4) الحجم الكبير	0	1	0	1	2	3
الفضلات بعد القطع (متر)	0.1	0.2	0.2	0.3	0.4	0.00

المطلوب: ما هي كمية الحجوم التي سوف يتم الحصول عليها من الملابس بحيث تكون الفضلات بعد القطع أقل ما يمكن.

الحل:

من أجل البدء بعملية الحل على أساس اعتماد الرمز التالي

$xj \Leftarrow$ قيمة البدلات التي يتم الحصول عليها باستخدام أسلوب القطع (j)

وعليه نحصل على النموذج الرياضي التالي:

(1) $4x_1 + x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 2x_5 \geq 12000$

(2) $x_2 + x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 18000$

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

(4) $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.4x_5 + 0x_6 \rightarrow Min.$

ويمكن إعادة صياغة النموذج الرياضي أعلاه على أساس النموذج المقابل[1]:

(1) $4y_1 \leq 0.1$

(2) $y_1 + y_2 \leq 0.2$

(3) $8y_1 \leq 0.2$

(4) $5y_1 + y_2 \leq 0.3$

(1) راجع الفصل الرابع من كتابنا هذا للتعرف على قواعد تحليل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل.

(5) $2y_1+_2y_2 \leq 0.4$

(6) $3y_2 \leq 0$

(7) $y_1, y_2 \leq 0$

(8) $w\ (y_1, y_2)= 12000\ y_1+18000y_2 \rightarrow Max.$

إن الحل لهذا النموذج هو:

$y_1 = 0.025$

$y_2 = 0$

$w\ (y_1, y_2) =300$

علما بأن الشروط رقم 2، رقم 4، رقم 5 يتم تحقيقها بشدة، ولهذا فإن $x_2=x_4= x_5=0$، وإن الشروط رقم 1، رقم3، رقم 6 يتم تحقيقها بشكل ضعيف. وإن الحل الابتدائي هو:

$x_6 = 6000$

ويوجد أكثر من حل لكل من x3, x1، وهما يحققان العلاقة الرياضية: $4x1 + 8x3 = 12000$، ومن بين هذه الحلول هي:

$x_1 = 3000$

$x_3 = 0$

وكذلك:

$x_1 = 0$

$x_3 = 1500$

وفيه يتم الحصول على 300 متر من الفضلات وكما هو واضح في دالة الهدف التالية:

$F\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 300$ متر

مثال رقم ❸

منشأة تعمل في سوق حرة لإنتاج مختلف أنواع الأثاث الخشبي:

- خزانات للملابس.
- كراسي ومناضد.
- ديكورات خشبية مختلفة.

تعمل هذه المنشأة على أساس قاعدة الاستغلال الأمثل لمواد الأولية، وقد وردت إليها نوعين من الألواح الخشبية. النوع الأول من الألواح الخشبية تكون من 50 قطعة، مساحة كل قطعة 6متر (6×1).

النوع الثاني من الألواح يتكون من 100 قطعة مساحة كل قطعة 5 متر (5×1) من هذين النوعين من الألواح يتطلب الأمر الحصول على 3 أنواع من الأثاث المنزلي حتى يكون بالمستطاع صنع هذه الأنواع الثلاث من الأثاث المنزلي يستلزم الأمر توفير لكل نوع من هذه الأنواع الثلاث ما يلي:

2 قطعة خشب بطول 2.4 متر.

3 قطعة خشب بطول 1.6 متر.

(على افتراض أن عرض وسمك كل قطعة من القطع المذكورة أعلاه يتفق تماما مع قياسات قطعة الأثاث).

طلبت إدارة المنشأة من إدارة الإنتاج دراسة المشكلة المذكورة في سبيل وضع برنامج خاص حول الكيفية التي يتم فيها تقطيع الأخشاب المتوفرة، حتى يكون بإمكان المنشأة إنتاج أكبر ما يمكن من قطع الأثاث المنزلي.

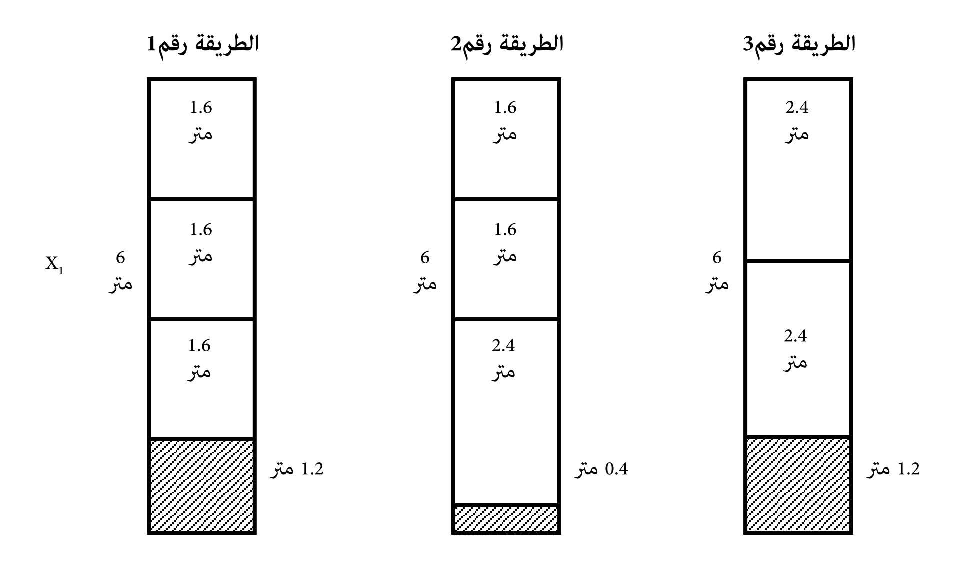
الحل:

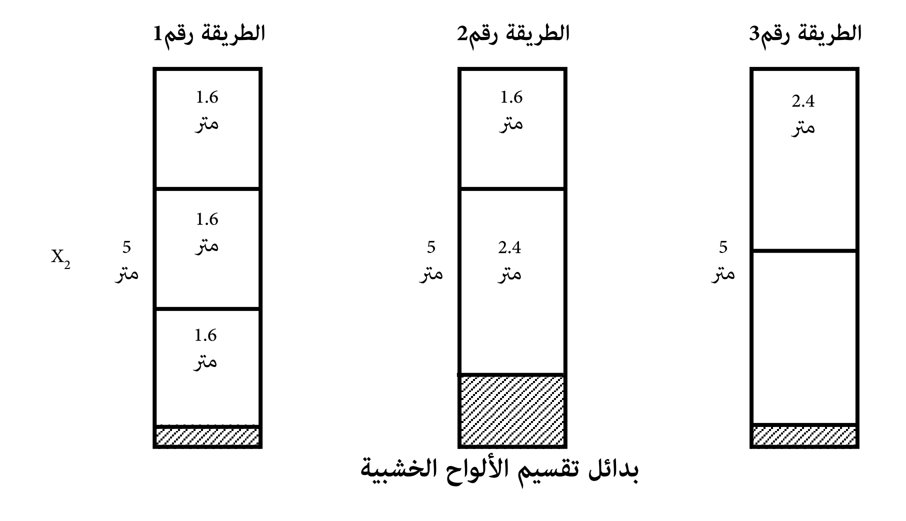
شكلت إدارة الإنتاج لجنة خاصة لدراسة المشكلة، وقد أجرت هذه الأخيرة التحليلات والعمليات الحسابية التالية:

إن المشكلة يمكن عرضها على أساس الرسوم التوضيحية في الشكل الموضح أدناه ويظهر في هذه الرسوم الكيفية التي يتم فيها تقسيم الألواح الخشبية وما يتبقى من فضلات ومخلفات بعد عملية التقطيع.

نفرض أن x_{11}, x_{12}, x_{13} هي كمية الألواح ذو الطول 6 متر التي سوف تقطع حسب الطريقة رقم (1)، رقم (2)، رقم (3).

نفرض أن: x_{21}, x_{22}, x_{23} هي كمية الألواح ذو الطول 5 متر التي سوف تقطع حسب الطريقة رقم (1)، رقم (2)، رقم (3).





بدائل تقسيم الألواح الخشبية

ولذلك فإن الذي يتم الحصول عليه من الألواح ذو الطول 6 متر هو كالآتي:

1- الألواح المقطعة حسب الطريقة رقم (1) هو $3x_{11}$ لوح بطول 1.6.

2- الألواح المقطعة حسب الطريقة رقم (2) هو $2x_{12}$ لوح بطول 1.6.

3- الألواح المقطعة حسب الطريقة رقم (3) هو $0x_{13}$ لوح بطول 1.6.

ما ينبغي الحصول علي من الألواح ذو الطول 5 متر هو كالآتي:

1- الألواح المقطعة حسب الطريقة رقم (1) هو $3x_{21}$ لوح بطول 1.6.

2- الألواح المقطعة حسب الطريقة رقم (2) هو $2x_{22}$ لوح بطول 1.6.

3- الألواح المقطعة حسب الطريقة رقم (3) هو $0x_{23}$ لوح بطول 1.6.

أي أن مجموع ما ينبغي أن نحصل عليه من اللوح 1.6 مر من مجموع الألواح ذو الطول 6 هو كالآتي:

$$3x_{11} + 2x_{12} + 0x_{13}$$

وإن مجموع ما ينبغي أن نحصل عليه من اللوح 1.6 متر في مجموع الألواح ذو الطول وهو:

$$3x_{21} + x_{22} + 0x_{23}$$

وأخيرا فإن مجموع الألواح ذو الطول 5 متر والطول 6 مر تغطي عدد من الألواح و الطول 1.6 متر هو ما يلي:

$$3x_{11} + 2x_{12} + 0x_{13} + 3x_{21} + x_{22} + 0x_{23}$$

وبنفس الطريقة تحسب عدد الألواح ذو الطول 2.4 التي يتم الحصول عليها من مجموع الأطوال ذو الطول 5 متر والطول 6 متر.

$$0x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + 0x_{21} + x_{22} + 2x_{23}$$

إن عدد قطع الألواح ذو الطول 1.6 متر سوف تكفي لـ

$\left(\frac{3x_{11} + 2x_{12} + 0x_{13} + 3x_{21} + x_{22} + 0x_{23}}{3}\right)$ من الأثاث المنزلي.

إن عدد قطع الألواح ذو الطول 1.6 متر سوف تكفي

$\left(\frac{0x_{11}+2x_{12}+2x_{13}+0x_{21}+x_{22}+2x_{23}}{2}\right)$ من الأثاث المنزلي.

نقوم بإدخال متغيرات جديدة α (حيث أن: $\alpha = 0, 1,2,3$) التي تحقق الشرط التالي:

$$\frac{3x_{11}+2x_{12}+0x_{13}+3x_{21}+x_{22}+0x_{23}}{3} \geq \alpha$$

$$\frac{0x_{11}+x_{12}+2x_{13}+0x_{21}+x_{22}+2x_{23}}{2} \geq \alpha$$

إن α تمثل عدد قطع الأثاث الكاملة.

إن الشروط الخاصة بالبرنامج فيما يتعلق بالألواح ذو القياس 5 والقياس 6 متر وهو ما يلي:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=50$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=100$$

إن النموذج النهائي للمشكلة قيد الدرس يمكن كتابتها بالصيغة التالية:

المطلوب إيجاد أقصى قيمة ممكنة لدالة الهدف: $Z \rightarrow \alpha$ مستوفيا بالشروط التالية:

(1) $x_{11}+x_{12}+x_{13}=50$

(2) $x_{21}+x_{22}+x_{23}=100$

(3) $\frac{3x_{11}+2x_{12}+0x_{13}+3x_{21}+x_{22}+0x_{23}}{3} \geq \alpha$

(4) $\frac{0x_{11}+x_{12}+2x_{13}+0x_{21}+x_{22}+2x_{23}}{2} \geq \alpha$

$\alpha = 0, 1, 2, \ldots$

$xij= = 0,1,2,\ldots$ (حيث أن $I= 1,2,\ldots, J = 1,2,3,$)

إن الشروط (3) ,(4) يمكن كتابتها وفقا للصيغة التالية:

$3x_{11} + 2x_{12} + 0x_{12} + 3x_{21} + x_{22} + 0x_{23} \geq 3\alpha$

$0x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + 0x_{21} + x_{22} + 2x_{23} \geq 2\alpha$

ولو تم إدخال متغيرات جديدة $y_1 \geq 0 , y_2 \geq 0$ فإن الشروط أعلاه. تكتب كما يلي:

$y_1 = 3x11 + 2x_{12} + 0x_{13} + 3x_{21} + x_{22} + 0x_{23} - 3\alpha \geq 0$

$y_2 = 0x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + 0x_{21} + x_{22} + 2x_{23} - 2\alpha \geq 0$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 100$

إن هكذا أنواع من النماذج الرياضية لا يمكن حلها باستخدام الطريقة البيانية حيث من المفروض في هذه الحالة اللجوء إلى طريقة أكثر تطور أو بالاستعانة بالبرامجيات الجاهزة والحاسوب.

مثال رقم 4

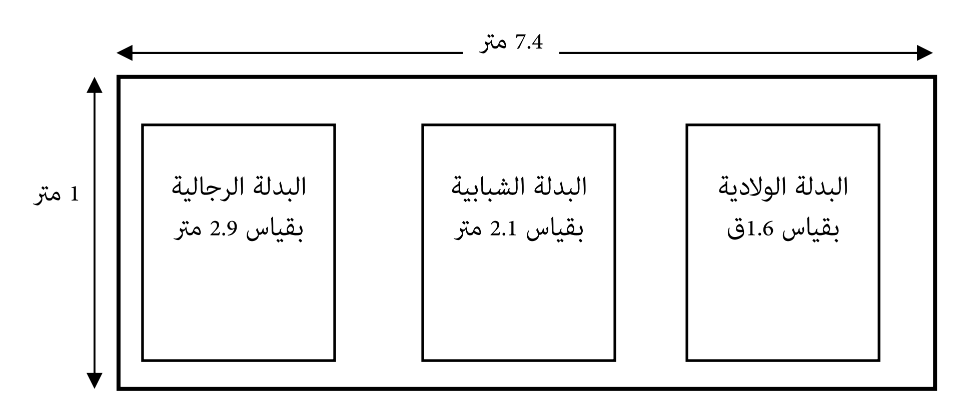
إحدى المنشآت الإنتاجية المتخصصة بإنتاج الألبسة الجاهزة، وردت إليها طلبية من إحدى الشركات التجارية لإنتاج أنواع معينة من الألبسة (رجالية، شبابية، ولادية) ولتنفيذ هذه الطلبة أصدرت إدارة الإنتاج في المنشأة المذكورة أمر عمل خاص لذلك، ومن أجل تحقيق الاستغلال الأمثل للأقمشة المتوفر لديها، تقرر سحب عدد معين من قطع القماش في المخازن بقياس 7.4 متر، لذلك جاء أمر العمل بتفصيلات من البيانات تتضمن بالإضافة إلى قياس قطع القماش المتوفرة، ما هو مطلوب من البدلات وقياساتها مع مقدار المخصص من القماش لكل نوع من البدلات مع بيان عدد هذه البدلات المطلوبة، وذلك كما هو واضح أدناه.

A.. البدلة الرجالية بقياس 2.9 متر بعدد 100 قطعة.

B.. البدلة الشبابية بقياس 2.1 متر بعدد 100 قطعة.

C.. البدلة الولادية بقياس 1.6 متر بعدد 100 قطعة.

من خلال تحليل واقع الحال من الناحية الفنية تبين أن هناك أكثر مـن بـديل لعمليـة القطع والقص لرولات القماس المشار إليها أعلاه. وفي كل بـديل يـتم الحصـول عـلى مقـدار معين من التلف وعدد معين ونوع معين من البدلات من الأنواع الـثلاث كـما هـو واضـح في الجدول رقم (2-1) وفيما يلي توضيح لأحد بدائل القص وذلك كما يلي:



حيث يتضح مـن الشـكل أعـلاه أنـه يعـبر عـن البـديل رقـم (1) وفيـه تكـون قيمـة S ⇐ 0.9 النموذج الرياضي الذي يعبر عـن هـذه المشـكلة يـتم صـياغته بـالاعتماد عـلى الفرضـيات والتعاريف السابقة وعلى أساس البيانات الواردة في الجدول وذلك كما يلي:

جدول رقم (2-1) بدائل القص

بدائل القص / نوع البدلة	Var. no.1	Var. no.2	Var. no.3	Var. no.4	Var. no.5	Var. no.6
البدلة الرجالية (.A) (2.9) متر	1	1	2	0	1	0
البدلة الشبابية (.B) (2.1) متر	1	0	0	2	2	1
البدلة الولادية (.C) (1.5) متر	1	3	1	2	0	3
مقدار التلف	0.9	0	0.1	0.2	0.3	0.8
المجموع	7.4	7.4	7.4	7.4	7.4	7.4

من أجل صياغة النموذج الرياضي لهذه المشكلة على أساس الجدول أعلاه يتم وضع الفرضيات التالية:

i ⇐ قياس البدلة المطلوبة (i= 1,2,…,m)

j ⇐ رقم بديل القص var. no. (j=1,2,…,n)

xj ⇐ عدد البدلات التي قيم الحصول عليها باستخدام البديل (j).

xij ⇐ معامل يمثل عدد المرات التي يتم فيها اعتماد طريقة القص (j) للحصول على البدلة من القياس أو النوع (i).

cj ⇐ مقدار الفضلات أو التلف المتبقي عند استخدام طريقة القص (j).

bi ⇐ العدد الكلي المطلوب من البدلات بالقياس (i).

Z ⇐ قيمة دالة الهدف التي تعبر عن مقدار التلف الكلي.

وعليه فإن الصيغة الرياضية للنموذج الذي يستخدم لمعالجة هذه الحالة، هو نموذج البرمجة الخطية القياسية Standard Model وذلك كما يلي:

$$\sum_{j=1}^{n} aij\, xj = bi \qquad (i = 1,2,...,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} cj\, xj \longrightarrow Min.$$

$$xj \geq 0$$

وبالتعويض عن القيم المجهولة من خلال ما هو وارد من بيانات في الجدول السابق نحصل على ما يلي:

(1) $\ldots x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 100$

(2) $\ldots x_1 + \quad + 2x4 + 2x_5 + x_6 = 100$

(3) $\ldots x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 100$

$$Z = 0.9x_1 + 0.0x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4 + 0.3x_5 + 0.8x_6 \rightarrow min$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_6 \geq 0$$

إن البدء بحل هذه المشكلة بطريقة السمبلكس وبالتحديد وفق طريقة (Big-M)، يتطلب الأمر في البداية إضافة المتغيرات الاصطناعية Artificial Variables وذلك كما يلي:

(1) $\ldots x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 \quad + \quad R_1 = 100$

(2) $\ldots x_1 + \quad + 2x4 + 2x_5 + x_6 + R_2 = 100$

(3) $\ldots x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_6 + R_3 = 100$

$$Z = 0.9x_1 + 0.0x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4 + 0.3x_5 + 0.8x_6 + MR_1 +$$

$$MR_2 + MR_3 \rightarrow Min$$

$$R_1 , R_2 , R_3 \geq 0$$

∴ دالة الهدف سوف تصبح كما يلي[1]:

$$Z = 0.9x_1 + 0.0x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4 + 0.3x_5 + 0.8x_6 + 100R_1 - 100R_2 + 100R_3 \rightarrow Min$$

وباستخدام الحاسوب والبرامجيات الجاهزة الخاصة لهذا الغرض يتم الحصول على النتائج التالية[2]:

		سم	متر
مقدار التلف الكلي (دالة الهدف)	في المرحلة الأولى	-	30 متر
	في المرحلة الثانية	0.50	15. متر
	في المرحلة الثالثة	0.40	10. متر
	في المرحلة الرابعة	160	00. متر
	في المرحلة الخامسة	160	00. متر

(1) لتسهيل عملية الحل يتم افتراض قيمة M(1000,100,10) لمزيد من التفاصيل راجع: كتابنا ":نمذجة القرارات الإدارية، دار اليازوري للنشر/ الأردن-عمان 1999.

(2) من أهم هذه البرامجيات هو Q.S.B، ولمزيد من التفاصيل حول استخدامها في معالجة هكذا نوع من المشاكل راجع كتابنا مع الدكتور محمود العبيدي "بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال" إصدار مؤسسة الوراق 200.

وفي المرحلة الأخيرة من الحل، نجد أن قيم المتغيرات xj هي كما يلي:

$x_3 = 40$	$x_1 = 0$
$x_5 = 20$	$x_2 = 0$
$x_4 = 30$	$x_6 = 0$

وبما أن xj يمثل عدد البدلات التي يتم الحصول عليها باعتماد بديل القص رقم (j) فإن:

1- اعتماد بديل القص رقم (3) يؤدي إلى الحصول على 40 بدلة رجالية (.A) وذلك لأن المتغير x3 كان ضمن العلاقة الرياضية رقم (1).

2- اعتماد بديل القص رقم (5) يؤدي إلى الحصول على 20 بدلة شبابية (.B) وذلك لأن المتغير x5 كان ضمن العلاقة الرياضية رقم (2).

3- اعتماد بديل القص رقم (4) يؤدي إلى الحصول على 30 بدلة رجالية (.C) وذلك لأن المتغير x4 فإن ضمن العلاقة الرياضية رقم (3).

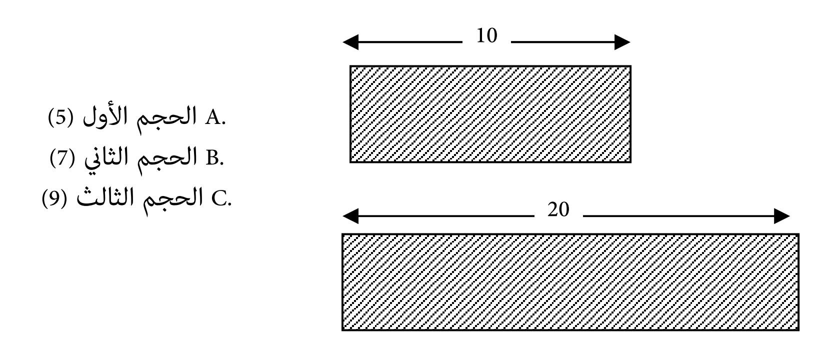
ولو تم تعويض هذه القيم في المعادلات السابقة لتحقق الشرط المطلوب ألا وهو الحصول (100) بدلة من كل نوع.

مشاكل مختلفة حول اختيار بدائل الإنتاج

مشكلة رقم (1) **Problem no.(1)**

مصنع متخصص بإنتاج الألبسة توفرت لديه نوعين من قياسات القماش وهي 10، 20 وحدة قياس، وكان عرض القماش ثابتة. يرغب هذا المصنع في تفصيل ثلاثة حجوم من البدلات النسائية، وهي:

.A الحجم الأول (5)
.B الحجم الثاني (7)
.C الحجم الثالث (9)



وقد علمت ما يلي:

1- أن تنفيذ القرار .Vij Decision Var.
2- المطلوب هو 100 بدلة من .A، 200 بدلة من الحجم .B، 300 بدلة من الحجم .C تماما.
3- تهدف إدارة المصنع إلى تقليل التلف إلى أقل ما يمكن.

المطلوب:

1- بناء النموذج الرياضي للمشكلة.
2- ما هو عدد البدلات من الأحجام الثلاث.

مشكلة رقم (2) **Problem no.(2)**

إحدى المنشآت المتخصصة بصناعة الأثاث المعدني، ترغب في طرح ثلاثة أنواع من المنتجات، ويمكن تطبيق خمسة أنواع من أساليب القطع ومقدار ما سوف يتم الحصول عليه من قطع وبيانات أخرى موضحة بالجدول التالي:

استهلاك المعدن لكل 1م من المنتجات	أساليب القطع					المنتجات
	V.	IV.	III.	II.	I.	
0.7	0	0	0	1	1	A.
0.4	0	1	2	0	1	B.
1.1	5	5	2	4	0	C.

وقد علمت أن المطلوب من المنتجات هو:

A ⇐ أكثر من 800 قطعة

B ⇐ ليس أكثر من 1000 قطعة

C ⇐ أقل من 800 قطعة.

المطلوب:

ما هي الصيغة الرياضية والحل لهذه المشكلة الذي يضمن أقل استهلاك ممكن للمعدن المتوفر.

النتائج النهائية:

$x_1 = \quad x_2 = \quad x_3 = x_4 = 0$

$x_5 = 100$

$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 880$ متر مربع

مشكلة رقم (3) **Problem no.(3)**

اثنين من المنتجات .II. I تحتاج إلى أربعة أنواع من المواد الأولية من مقادير مختلفة وهي D, C, B, A كما هو واضح في الجدول التالي:

المنتجات	المواد الأولية			
	A.	**B.**	**C.**	**D.**
I	3	2	4	0
II	1	5	0	5
المخلفات في كغم	0.8	1.2	0.6	0.9

المطلوب هو:

1- ما هي كمية المواد الأولية الواجب شرائها واللازمة لإنتاج:

أ- على الأقل 1000 وحدة المنتج .I

ب- على الأقل 2000 وحدة من المنتج .II.

2- ما هي أقل كلفة كلية ممكن للمخلفات إذا علمت أن تكاليف 1 كغم منها هو 2.5 دولار.

النتائج النهائية:

يوجد حلول غير محدودة لهكذا نوع من المشاكل ومن بينها ما يلي:

$x_1 = x4 = 0$

$x_2 = 400$

$x_3 = 50$

$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1275$

مشكلة رقم (4)		**Problem no.(4)**

إحدى المنشآت المتخصصة بصناعة علب لتعبئة نوع معين من المواد الغذائية، وقد توفرت نوعين من صفائح الألمنيوم لهذا الغرض وذلك كما يلي:

21500 متر بعرض 1.5 متر.

14000 متر بعرض 1.8 متر.

من هذه القطع يتم الحصول على ما يلي:

- الغطاء العلوي والسفلي.
- الجوانب.

البيانات المتعلقة بهذه المشكلة هي كما في الجدول التالي:

مكونات العلبة	أسلوب القطع لكل 1 متر من الألمنيوم					
	عرض 1.5 متر			عرض 1.8 متر		
	I.	II.	III.	I.	II.	III.
الأغطية	70	15	10	30	20	-
جوانب العلبة	-	20	30	25	30	50

المطلوب: تعظيم أكبر قدر ممكن من الطلب وبأقل قدر ممكن من التلف.

النتائج النهائية:

- يتم استلام 726250 علبة
- ويتم استغلال 100% للألمنيوم المتوفر

$x_1 = 20625$

$x_2 = 0$

$x_3 = 875$

$x_4 = 0$

$x_5 = 0$

$x_6 = 14000$

مشكلة رقم(5) **Problem no.(5)**

أحد المعامل المتخصصة بصناعة الشبابيك استلمت طلب لتجهيز زجاج لـ 300 شباك: ولكل شباك واحد يتم استخدام

(2) زجاجة من النوع e1

(3) زجاجة من النوع e2

الزجاج	أساليب القطع		
	I.	II.	III.
e_1	6	4	3
e_2	0	4	6
المخلفات (كغم)	0.6	1.6	1.2

يوجد ثلاثة أساليب لقطع الزجاج كما هو واضح من الجدول أعلاه.

المطلوب:

1- صياغة النموذج الرياضي للمشكلة.

2- بناء النموذج الرياضي المقابل.

3- حل المشكلة بيانيا وما هي أقل قيمة لدالة الهدف.

النتائج النهائية:

$x_1 = 25$

$x_2 = 0$

$x_3 = 150$

$F(x_1, x_2, x_3) = 195$

مشكلة رقم (6) **Problem no.(6)**

إحدى المنشآت المتخصصة بإنتاج الألبسة الجاهزة ترغب في طرح ثلاث أنواع من قياسات الألبسة الجاهزة وكما يلي:

- حجم صغير 2.5 بمقدار 625 قطعة.
- حجم متوسط 3.0 بمقدار 930 قطعة.
- حجم كبير 4.5 بمقدار 2025 قطعة.

وقد توفرت لدى المنشآت نوعين من قطع الأقمشة أحدهما بقياس 8 والأخرى مقياس 10 ومن الجدير بالذكر هنا أن الإنتاج من القياس 8 لا يمكن أن يتجاوز المقدار 30.

المطلوب:

1- تنظيم الجدول الخاص باحتمالات وبدائل القطع.

2- ما هي كمية الإنتاج من الأحجام الثلاث بحيث يكون التالف أقل ما يمكن.

الحل: نتائج الحل المطلوب الأول هو

الألبسة	أساليب القطع											
	قياس 8					قياس 10						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
حجم صغير (2.5)	3	2	1	0	0	4	2	2	1	1	0	0
حجم متوسط(3.0)	0	1	0	2	1	0	1	0	2	1	3	0
حجم كبير(4.5)	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	2
المخلفات	0.5	0	1	2	0.5	0	2	0.5	1.5	0	1	1

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$

$x_5 = 30$, $x_{10} = 250$, $x_{11} = 10$, $x_{12} = 85$

$F(x_1, x_2, \ldots x_{12}) = 110$



أسئلة نظرية وتمارين عملية حول الفصل الثاني

1- اكتب الصيغة الرياضية لنموذج المزيج.

2- عرف متغيرات الأساس والمعاملات التي ترد في نموذج المزيج.

3- اكتب الصيغة الرياضية التي تمثل النموذج المقابل لنموذج المزيج.

4- استخدم بيانات افتراضية لأجل تقديم مثال تطبيقي عن نموذج التغذية.

5- اكتب التغيير الكمي والعملي الذي يتعلق بالقيمة الرياضي التالي:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}xn \geq 500$$

6- كيف يتم تعريف متغيرات القرار في مشاكل اختيار بدائل الإنتاج.

7- ما هو مفهوم العوامل أو المعاملات الداخلة في صياغة النموذج الرياضي لمشكلة اختيار بدائل الإنتاج.

8- ما هي التطبيقات في الواقع العملي التي ترد في موضوع اختيار بدائل الإنتاج.

9- ما هي معاملات دالة الهدف في حالة نموذج القطع.

10- ما هي طبيعة القيم الحرة R. (i).s في نموذج التغذية.

الفصل الثالث

أسلوب السمبلكس وتطبيقاته العملية

1.3 مفهوم أسلوب السمبلكس

2.3 أنواع طرق الحل وفق أسلوب السمبلكس

3.3 طريقة الحل العادية

4.3 استخدام البرامجيات والحاسوب

5.3 بيانات جدول السمبلكس ودورها في ترشيد خطط الإنتاج

أسئلة وتمارين حول الفصل الثالث

الفصل الثالث

أسلوب السمبلكس وتطبيقاته العملية

1.3 مفهوم أسلوب السمبلكس

إن مبتكر هذه الطريقة هو العالم الرياضي G.Dantzig وذلك في عام 1947، وتعتبر هذه الطريقة من أهم الطرق التي يتم اعتمادها في حل مشاكل البرمجة الخطية وذلك لكونها تعالج مشاكل أكثر تعقيدا من التي تستخدم فيها الطريقة البيانية، وبالتحديد تلك المشاكل التي يكون فيها عدد كبير من المتغيرات. إن فكرة هذه الطريقة قائمة على أساس إيجاد الحل المطلوب للمشكلة المدروسة (التي يتم التعبير عنها من خلال النموذج الرياضي) وذلك في مراحل متسلسلة.

يتم في المرحلة الأولى إيجاد الحل الابتدائي الأساسي الممكن، وفي المرحلة اللاحقة يتم تحسين هذا الحل تمهيدا نحو إيجاد الحل الأفضل الذي قد تكون عملية الحصول عليه تمتد لأكثر من مرحلة واحدة. في المرحلة الأخيرة يتم الحصول على الحل الأمثل والنهائي للمشكلة.

إن هذه المراحل من عمليات الحل تتم في إطار جدول خاص لذلك يعرف باسم جدول السمبلكس Simplex Table كما هو واضح في جدول رقم (3-1) وكذلك كما في الجدول رقم (3-2) حيث يمكن أن يكون الحقل الخاص بمعاملات متغيرات الأساس في دالة الهدف C_B إلى الجانب الأيسر من الجدول وذلك كإجراء شكلي لا غير.

2.3 أنواع طرق الحل وفق أسلوب السمبلكس

إن طرق الحل وفق طريقة السـمبلكس عـلى أسـاس الجـداول الـوارد ذكرهـا أعـلاه متنوعة ويمكن إجمالها كما يلي (الشكل رقم3-1).

1- **طريقة الحل التقليدية،** وتعرف أيضا باستخدام الأسلوب اليدوي حيث يـتم اللجـوء إلى هذا الأسلوب لمعالجة المشـاكل الأقـل تعقيـدا، وكـذلك مـن أجـل إيصـال فكـرة وتكنيك الطريقة بشكل مفصل للقارئ. وضمن هذه الطريقة يرد نوعين من الطـرق الفرعية وهي كما يلي:

أ- الطريقة الحسابية التقليدية.

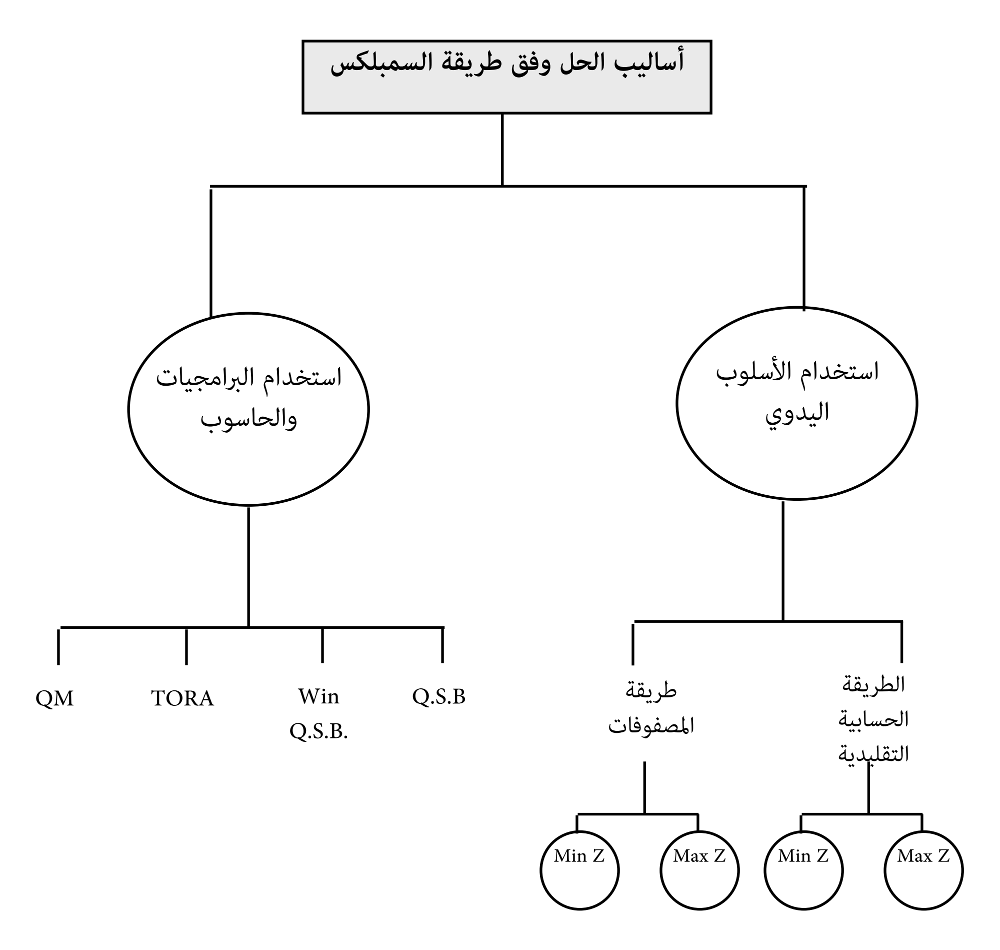
ب- طريقة المصفوفات.

جدول رقم (3-1) الصيغة العامة لجدول السمبلكس Simplex Table

المتغيرات Xj Variables Si	X_1	X_2	X_3	…	xn	S_1	S_2	…	Sm	قيمة المتغير الأساس bi	معامل المتغير الأساس في دالة الهدف C_B
Cj معامل المتغيرات في دالة الهدف											
المتغيرات الأساسية Basic Variables											
Zj											دالة الهدف
(Cj – Zj)											← Z
المتغيرات الأساسية Basic Variables											
Zj											دالة الهدف
(Cj – Zj)											← Z
المتغيرات الأساسية Basic Variables											
Zj											دالة الهدف
(Cj – Zj)											← Z

جدول رقم (3-2) الصيغة العامة لجدول السمبلكس Simplex Table

CB	المتغيرات Xj Variables Si	X_1	X_2	X_3	…	xn	S_1	S_2	...	Sm	القيم الحرة bi) ودالة الهدف Z
	Cj معامل المتغيرات في دالة الهدف										
	المتغيرات الأساسية Basic Variables										
	Zj										دالة الهدف ← Z
	(Cj – Zj)										
	المتغيرات الأساسية Basic Variables										
	Zj										دالة الهدف ← Z
	(Cj – Zj)										
	المتغيرات الأساسية Basic Variables										
	Zj										دالة الهدف ← Z
	(Cj – Zj)										



شكل رقم (3-1) أساليب الحل وفق طريقة السمبلكس

Simplex Method Technique

2- **استخدام البرامجيات والحاسوب**، حيث أن هذه الطريق أكثر تطورا وتستخدم عادة لمعالجة المشاكل الكبيرة (عدد متغيراتها كبير جدا) والمعقدة، ومن أهم البرامج المستخدمة في هذا المجال هي:

Q.S.B+, Win Q.S.B, TORA, QM,….

وفيما يلي توضيح لكل واحدة من الأساليب السابقة.

3.3 طريقة الحل التقليدية

أولا: الطريقة الحسابية التقليدية

في البداية ينبغي التمييز بين خطوات الحل بموجب هذه الطريقة عندما تكون دالة الهدف تصل إلى أعلى ما يمكن (Max.) وأن القيود مكتوبة في حالة (أقل أو يساوي ≤) والتي تختلف بعض الشيء عن الحالة عندما تكون المشكلة لها دالة هدف تصل إلى أقل ما يمكن (Min.) وأن القيود مكتوبة في حالة (أكبر أو يساوي≥) أو خليط من العلاقات (≤، =، ≥)، أي ينبغي التمييز بين الحالات التالية:

1- الحل في حالة تعظيم دالة الهدف (Max. Z., F.)

2- الحل في حالة تصغير دالة الهدف (Min Z., F.)

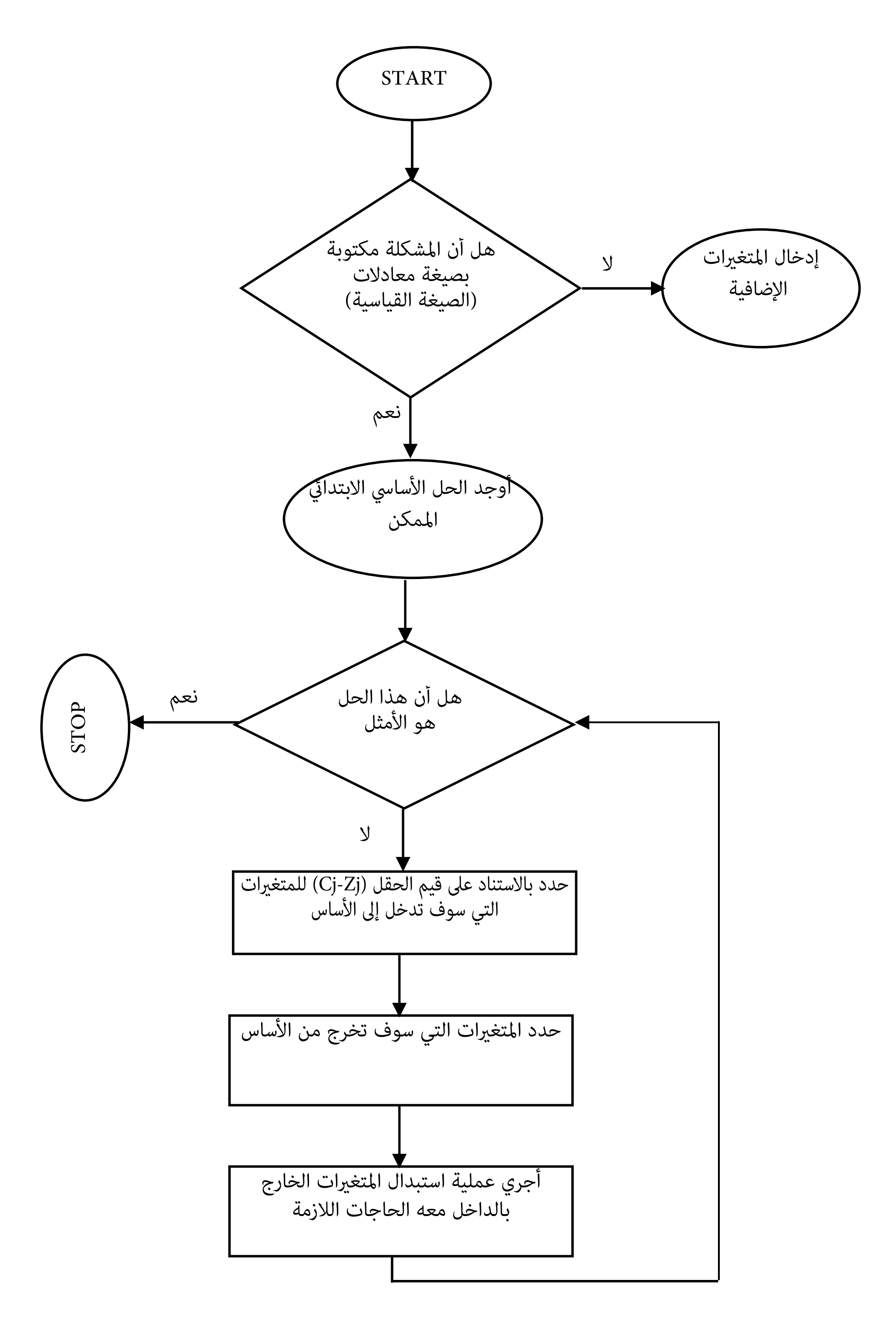
وفي كلا الحالتين هنالك إجراءات متسلسلة ومنظمة ينبغي القيام بها كما هو واضح من المخطط الانسيابي في الشكل رقم (3-2)، وهذه الإجراءات هي:

1- الحصول على حل أولي ابتدائي ممكن.

2- التأكد من أن هذا الحل هو الأمثل أم لا.

3- إذا لم يكن الحل الذي تم الحصول عليه هو الأمثل، يتم الانتقال إلى المرحلة التالية بعد أن يجري تحسين الحل السابق من أجل الحصول على الحل الأمثل.

إن فكرة هذه الطريقة تتضح من خلال المخطط الانسيابي الموضح بالشكل رقم (3-2) الذي بموجبه تتم عملية الحل ضمن جدول السمبلكس.



الشكل رقم (3-2) المخطط الانسيابي الذي بموجبه تتم عملية الحل ضمن جدول السمبلكس

الحل بطريقة السمبلكس في حالة تعظيم دالة الهدف بوجود العلامة (≤)

بعد أن يتم تحويل صيغة النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية من خلال إضافة المتغيرات الراكدة ($S_1, S_2, \ldots Sm$) يتم اعتماد الخطوات التالية:

نقل البيانات المتوفرة في النموذج الرياضي إلى المرحلة الأولى في جدول السمبلكس، حيث يتم وضع المتغيرات الراكدة في الحقل الخاص بالمتغيرات الأساسية Basic Variables ولكونها تأخذ هذه الصفة من هذه المرحلة من عملية الحل، ويتم وضع تحت كل متغير ($x_1, x_2, \ldots xn$) المعاملات للمتغيرات في القيود. أي أمام المتغير S1 توضع المعاملات للمتغيرات في العلاقة الرياضية الأولى، وأمام S_2 توضع المعاملات للمتغيرات في العلاقة الرياضية الثانية وهكذا. في العمود bi توضع القيم الحرة، وهي القيم الموجودة في الطرف الأيمن من كل علاقة رياضية. أما العمود الأخير C_B فإنه توضع فيه معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف. في الحقل cj توضع معاملات دالة الهدف.

وفي بقية الحقول تتم عمليات حسابية على النحو التالي:

1- تحسب القيم (Zj) ، (Cj- Zj)، (Z) كما يلي:

- القيمة (Zj) تحسب من العلاقة التالية:

$$Zj = C_B * aij$$

$$i = 1,2,\ldots,m$$

$$j = 1,2,\ldots,n$$

حيث أن:

CB = معامل المتغيرات الأساسي في دالة الهدف.

aij = عمود القيم الواقعة تحت المتغيرات الأساسية وغير الأساسية

ويمكن كتابة هذه العلاقة الرياضية كما يلي:

$$Zj = \sum_{i=1}^{m} C_{Bj} \ aij$$

$$j = 1,2,\ldots,n$$

على اعتبار أن بعد كل عملية ضرب لقيم العمود C_B يتم جمع حصيلة الضرب ضمن العمود (j) ذاته.

- القيمة (j-Zj) تحسب هذه القيمة من حاصل طرح القيم التي تم إيجادها في أعلاه من معاملات المتغيرات في دالة الهدف Cj.

- القيمة (Z) تحسب كما يلي:

$$Z = C_B * bi$$

$$i = 1,2,\ldots,m$$

2- في المرحلة التالية يتم تحسين الحل الأولي الابتدائي وذلك من خلال تغيير تشكيلة المتغيرات الأساسية حيث يتم إدخال متغير جديد وإخراج متغير حالي. ويتم إدخال ذلك المتغير الذي يقابل أكبر قيمة موجبة في الحقل (cj-zj)، ويسمى العمود الذي يوجد فيه هكذا متغير بالعمود المحوري Pivotal column، ويتم تحديد المتغير الخارج بعد أن يتم تقسيم القيم في الحقل bi على ما يقابلها من قيم في العمود المحوري، وأن المتغير الأساسي الذي يقابل أقل قيمة يعتبر هو المتغير الخارج Pivotal Row.

إن العنصر الواقع في نقطة تقاطع العمود المحوري مع الصف المحوري يسمى بالعنصر المحوري Pivotal Element، ولهذا العنصر أهمية في الحسابات اللاحقة.

3- تحسب القيم في المرحلة التي تلي المرحلة الأولى من جدول السمبلكس وفق عمليات حسابية معينة. حيث تعتمد العمليات الحسابية في المرحلة الثانية على ما يقابلها من قيم في المرحلة الأولى، أي بعبارة أخرى لحساب القيم للمتغيرات في المرحلة الثانية، فإن ذلك يعتمد على ما يقابلها من قيم في المرحلة الأولى، ولحساب قيم

المتغيرات في المرحلة الثالثة، فإن ذلك يعتمد على قيم المتغيرات في المرحلة الثانية وهكذا.

4- في المراحل التالية للمرحلة الأولى من جدول السمبلكس تعطى الأولوية في عمليات حساب قيم المتغيرات، لقيم المتغير الداخل Entering Variable، حيث تحسب قيم هذا المتغير بقسمة ما يقابلها من قيم في المرحلة السابقة على العنصر المحوري.

5- قيم المتغيرات الأخرى (غير المتغير الداخل) تحسب وفق العلاقة الرياضية التالية:

$$Nj = K - \frac{M * y}{PE}$$

حيث أن:

Nj ⇐ القيمة الجديدة المطلوب وضعها في الحقل (j) (j=1,2,…,n)

K ⇐ القيمة الحالية

M ⇐ القيمة المقابلة للقيمة الحالية في الصف المحوري.

Y ⇐ القيمة المقابلة للقيمة الحالية في العمود المحوري

PE ⇐ العنصر المحوري.

الحل بأسلوب السمبلكس (الطريقة المبسطة) في حالة تصغير دالة الهدف (Min.Z) مع وجود خليط من العلاقات الرياضية (≤ , = , ≥) في القيود:

إن بعض المشاكل التطبيقية في الواقع العملي، يتم التعبير عنها من خلال نموذج رياضي تكون فيه دالة الهدف تصل إلى أقل ما يمكن وتطبيق قيود النموذج الرياضي عادة بصيغة (≥ أكبر أو يساوي) مع وجود بعض الحالات للأنواع الأخرى من القيود التي تحمل العلاقات الرياضية (= يساوي، ≤ أقل ويساوي)، إن تحويل هذا النوع من النماذج الرياضية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، يتم بعد أن تضاف وتطرح متغيرات معينة، وقد سبق أن تم توضيح ذلك في فقرات سابقة. إن المتغيرات التي تضاف هي:

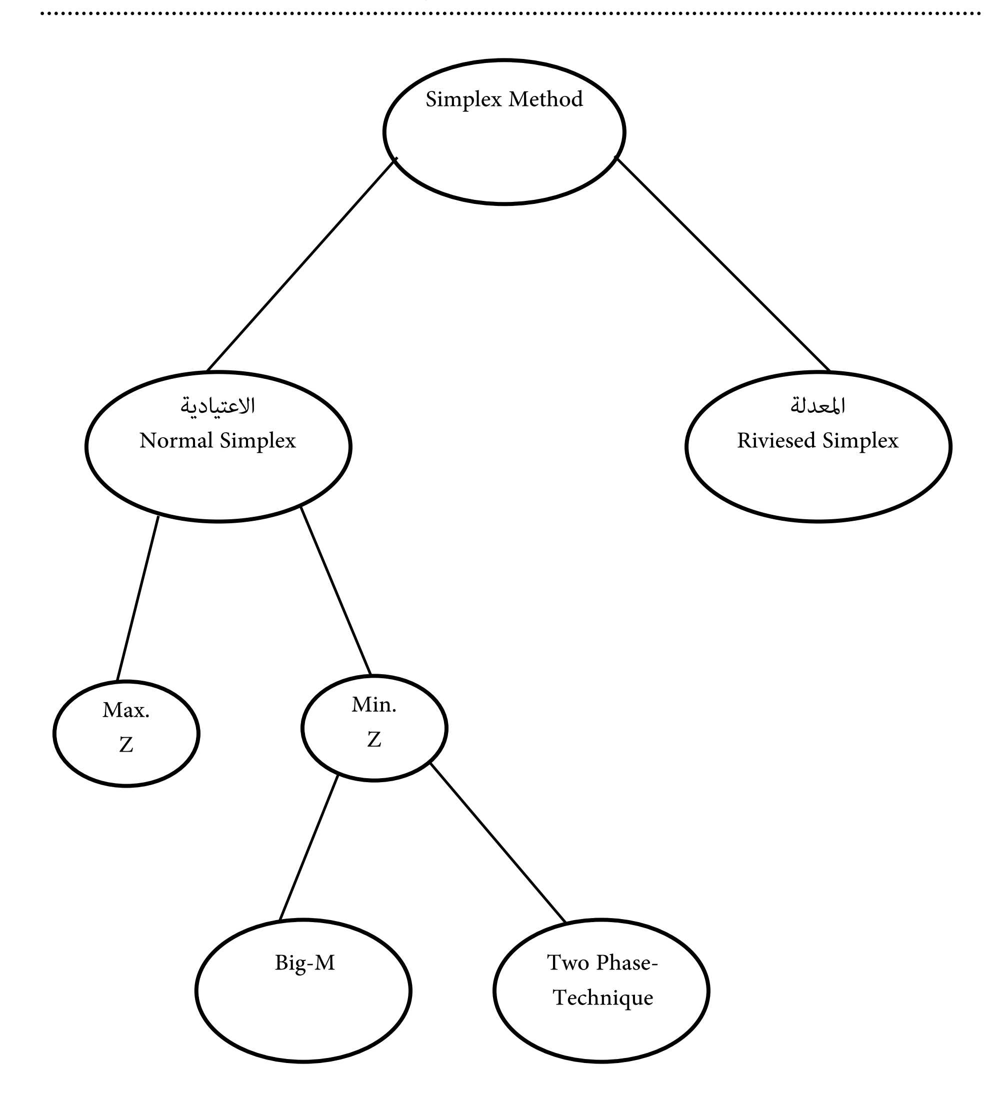
1- المتغير الفائض Surplus (s) الذي يطرح من الطرف الأيمن للعلاقة الرياضية التي تعبر عن القيود والتي قد تطرح أو تضاف في معادلة دالة الهدف.
2- المتغير الاصطناعي Artificial Variable (R) الذي يضاف إلى القيود أو يطرح أو يضاف في دالة الهدف، حيث تظهر في الدالة المذكورة بمعامل كبير جدا يسمى (M- الكبيرة)[1].

إن حل النموذج الرياضي الذي يحمل المواصفات أعلاه، ويتم تحويله إلى الصيغة القياسية بعد إضافة المتغيرات (+S, R, -S) يتم حله وفق اثنين من الطرق الأساسية، وهذه الطرق هي:

1- طريقة (M- الكبيرة) M- Technique Method.
2- طريقة المرحلتين Two- Phase Technique.

إن موقع هاتين الطريقتين بالنسبة لطريقة السمبلكس يمكن توضيحها من خلال الشكل رقم (3-3).

(1) لمزيد من التفاصيل راجع الجدول الخاص بإضافة المتغيرات (+S, R, -S) في فقرات سابقة من هذا الكتاب.



شكل رقم (3-3) موقع طريقة M- الكبيرة وطريقة المرحلتين ضمن طريقة السمبلكس

إن العمليات الحسابية في حالة (Min.Z) تتم في إطار جدول السـمبلكس عـلى أسـاس نفس القواعد السابقة، سواء كان ذلك يتعلق بطريقة (M- الكبيرة) أو طريقة المرحلتين، ما عدا وجود بعض الاختلافات البسيطة التي يمكن إجمالها من خلا النقاط التالية:

1- المتغير الداخل، هو ذلك المتغير الذي يقابل أكبر قيمة سالبة وذلك في الحقل (cj-zj).

2- يتم الوصول إلى مرحلة الحل الأمثل إذا كانت كل قيم الحقل (cj-zj) موجبة وأصفار، أي أن $0 \geq$ (cj-zj).

3- إن قيمة دالة الهدف (z) في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس تكون أعلى ما يمكن، وبعد ذلك تبدأ في التناقص حيث تكون في آخر مرحلة من جدول السمبلكس أقل ما يمكن والذي يمثل الحل الأمثل.

وبالمقارنة بين طريقة (M-Technique) وطريقة المرحلتين فإنه بالنسبة للطريقة الأولى هي الأكثر شيوعا في الواقع العملي وسيرد عليها تطبيقات في فقرات لاحقة. أما بالنسبة للطريقة الثانية والتي ترد لمعالجة حالات معينة في الواقع العملي فإن الحصول على الحل الأمثل باستخدام هذه الطريقة كما هو واضح من الاسم يتم على مرحلتين، وذلك كما يلي:

المرحلة الأولى:

والتي بموجبها يتم تكوين دالة هدف جديدة والتي تعبر عن مجموع المتغيرات الاصطناعية المضافة إلى القيود، وباستخدام طريقة السمبلكس يتم إيجاد أصغر قيمة لهذه الدالة (بغض النظر عن الهدف الأصلي للمشكلة، أما قيود المشكلة فهي نفس قيود النموذج الأصلي.

إن قيم المتغيرات الاصطناعية التي يتم الحصول عليها في هذا النموذج في هذه المرحلة تكون جميعها مساوية للصفر، وبهذا نحصل على حلا أساسيا ممكنا خاليا من المتغيرات الاصطناعية والذي يعتبر حلا ابتدائيا للمرحلة الثانية.

ولتوضيح فكرة هذه الطريقة تأخذ مثال تطبيقي كما سيرد أدناه.

مثال رقم ❶

من أجل التواصل في فكرة طريقة السمبلكس نورد هنا المثـال الأول الـوارد في حالـة تطبيق طريقة (Big-M) وذلك كما يلي:

(1) $X_1 + 3X_2 \geq 30$

(2) $4X_1 + 2X_2 \geq 40$

$$Z = 2X_1 + X_2 \rightarrow MIN$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

إن عملية الحل في المرحلة الأولى تتم من خلال خطوتين متتابعتين. في الخطوة الأولى لعملية حل هذا النموذج الرياضي هي تحويلة من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسـية وذلك بطرح المتغيرات الفائض (Sur Plus) من الجهة اليسرى في القيود وذلك كما يلي:

(1) $X_1 + 3X_2 - S_1 = 30$

(2) $4X_1 + 2X_2 - S_2 = 40$

$$Z = 2X_1 + 3X_2 + 0.S_1 + 0.S_2 \rightarrow MIN$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

$$S_1 , S_2 \geq 0$$

يلاحظ في النموذج القياسي السابق عدم الحصـول عـلى مصـفوفة الوحـدة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Identity Matrix، ذلك يتم إضافة متغيرات اصطناعية كما يلي:

(1) $X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 = 30$

(2) $4X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 40$

حيث أن:

$$X_1 , X_2 \geq 0$$
$$S_1 , S_2 \geq 0$$
$$R_1, R_2 \geq 0$$

الخطوة الثانية يتم بموجبها صياغة دالة هدف جديدة وذلك على النحو التالي:

$$W = (R_1 + R_2) \rightarrow Min.$$

وفقا للقيود الوارد أعلاه والمرتبطة بالنموذج الرياضي القياسي يتم حل هذه المشكلة بالجدول رقم (3-3). يلاحظ في هذا الجدول أن جميع قيم (ci-wj) في المرحلة الأخيرة كانت موجبة وأصفار $(cj-wj) \geq 0$.

وهذا يعني أنه تم التوصل إلى الحل النهائي للمرحل الأولى ويلاحظ في هذه المرحلة، أنه تم استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R1,R2) من الحل الأساسي الممكن وعليه ينبغي الانتقال إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية

حيث يتم بدء الحل في هذه المرحلة بالحل النهائي الأساسي الممكن (الذي هو امتداد للمرحلة الأولى) وباستخدام دالة الهدف الأصلية للنموذج الرياضي للمشكلة، أي أن الجزء الأخير لجدول السمبلكس في المرحلة الثانية مع تغيير في دالة الهدف، وبعد ذلك يتم تحسين الحل لغاية بلوغ الحل الأمثل النهائي. وفيما يلي توضيح لفكرة هذه المرحلة مع الاستعانة كما ذكرنا بدالة الهدف الأصلية:

$$Z = 2X_1 + X_2 + 0.S_1 + 0.S_2 \rightarrow Min$$

والجدول رقم (3-4) يوضح ذلك، حيث يتم فيه الحصول على الحل الأمثل المطلوب بالاعتماد على المرحلة الأولى.

جدول رقم (3-3) المرحلة الأولى

المتغيرات Xj		X_1	X_2	S_1	S_2	R1	R_2	قيمة المتغير الأساسي bi	معامل التغير الأساسي في دالة الهدف C_B
معاملات المتغيرات في دالة الهدف cj		0	0	0	0	1	1		
المتغيرات الأساسية	R_1	1	3	-1	0	1	0	30	1
	R_2	(4)	2	0	-1	1	1		
Wj		2	5	-1	-1	1	1	70	قيمة دالة الهدفw←
(cj-wj)		(-5)	-5	1	1	0	0		
المتغيرات الأساسية	R_1	0	$\left(\frac{5}{2}\right)$	-1	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	20	1
	R_2	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	10	0
Wj		1	$\left(\frac{5}{2}\right)$	-1	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	20	قيمة دالة الهدفw←
(cj-wj)		0	$\left(-\frac{5}{2}\right)$	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$		
المتغيرات الأساسية	X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	8	0
	X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	6	0
Wj		0	0	0	0	0	0	0	قيمة دالة الهدفw←
(cj-wj)		0	0	0	0	1	1		

جدول رقم (4-3) المرحلة الثانية

المتغيرات Xj		X_1	X_2	S_1	S_2	قيمة المتغير الأساسي bi	معامل التغير الأساسي في دالة الهدف C_B
معاملات المتغيرات في دالة الهدف cj		2	1	0	0		
المتغيرات الأساسية	X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	8	1
	X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	6	2
Wj		2	1	0	$-\frac{1}{5}$	20	قيمة دالة الهدفZ
(cj-wj)		0	0	0	$\frac{1}{5}$		

في الجدول أعلاه يتضح أن جميع قيم الحقل (Cj-Zj) هي موجبة وهذا يعني أنه تم التوصل إلى الحل الأمثل. وبموجب هذا الحل ينبغي على منظمة الأعمال الإنتاجية أن تلتزم بخطة الإنتاج التالية:

$X_1 = 6$ أي طرح المنتج No.1 بمقدار 6 وحدات.

$X_2 = 8$ أي طرح المنتج No.2 بمقدار 8 وحدات.

وبذلك تكون التكاليف الكلية أو النفقات (قيمة Z) اقل ما يمكن وهي 20 وحدة نقدية (Z=20). وهذه نفس النتيجة التي تم التوصل إليها بموجب طريقة (Big-M).

ثانيا: طريقة المصفوفات

ويقصد بذلك اعتماد نظرية المصفوفات وبالذات بعض عمليات الضرب والجمع والمطلوب هو تنفيذ العمليات الحسابية لمراحل جدول السمبلكس وعلى الأغلب تأتي هذه الطريقة مكملة للطريقة السابقة ومحققة لنتائجها. ولتوضيح هذه الطريقة نبدأ بالعلاقات التالية:

إن أي نموذج خطي، وعلى سبيل المثال النموذج التالي:

دالة الهدف:

$$C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + CnXn \rightarrow Max$$

مستوفيا الشروط التالية:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_1nXn \leq b_1$$

....

$$am_1X_1 + am_2X_2 + \dots + amnXn \leq bm$$

$$X_1, X_2, \dots, Xn \geq 0$$

يمكن إعادة كتابة هذا النموذج الرياضي في صيغة مختصرة وكما يلي:

$$Cx \rightarrow Max$$

$$A\,x \leq b$$

$$x \geq 0$$

حيث أن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots a_1 n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ am_1, & am_2, & \dots amn \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ bm \end{bmatrix} \qquad C = [\, c_1 , c_2 \dots cn \,]$$

إن عناصر ومكونات النموذج الرياضي السابق تدخل المرحلة الأولى من جدول السمبلكس وفقا لما هو وارد في الشكل التالي:

	X_B	C	
C_B	Zj	A I	b
	Cj-Zj	O	Z
		C	

من الشكل السابق يتضح أن:

A (aij) $\Leftarrow$ = مصفوفة المعاملات للمتغيرات في القيود

B = عمود القيم الحرة

C = صف المعاملات للمتغيرات في دالة الهدف

CB = معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف

I = مصفوفة الوحدة Identity Matrix بقياس mxn وهو عبارة عن عناصر تمثل معاملات المتغيرات الراكدة أو الفائض التي تظهر في المرحلة الأولى من الجدول.

O = صف من القيم الصفرية

XB = عمود المتغيرات الأساسية Basic Variables

Zj = حسب من العلاقة الرياضية (Zj= CB * bi)

(Cj-Zj) = حاصل طرح صف القيم Zj أعلاه من صف القيم Cj.

بعد الانتهاء من ترتيبات وحسابات المرحلة الأولى أعلاه، يتم الانتقال إلى المراحل التالية التي يتم فيها تحسين الحل لغاية بلوغ مرحلة الحل الأمثل. إن هذه المراحل تسمى أيضا بالمراحل الوسطية والمرحلة الأخيرة تسمى بمرحلة الحل الأمثل وفي كل منها يستخدم حساب المصفوفات كما هو واضح في الشكل التالي (الذي يعبر عن مرحلة نموذجية افتراضية):

	المتغيرات الأساسية	C		القيم الحرة (bi) ودالة الهدف (Z)
C_B	X_B	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}\ b$
	Zj	$C_B^T\ B^{-1}A$	$C_B^T\ B^{-1}$	$C_B^T\ B^{-1}\ b$
	Cj-Zj	$C - C_B^T\ B^{-1}A$	$C_B^T\ B^{-1}$	

من الجدول السابق يتضح ما يلي:

B^{-1} = مقلوب مصفوفة المعاملات للقيود في تلك المرحلة وللمتغيرات الأساسية الجديدة.

إن مقلوب المصفوفة B تشغل موقع مصفوفة الوحدة في الجدول الأولي.

C_B^T = يعني متجه أفقي لمعاملات المتغيرات الأساسية

وفيما يلي أمثلة تطبيقية توضيح فكرة هذه الطريقة.

مثال رقم ❶

إحدى المنشآت الإنتاجية ترغب في طرح نوعين من المنتجات w_1,w_2، يتم ذلك على أساس الاعتماد على ثلاثة أنواع من المواد الأولية s_3,s_2,s_1 التي تمثل محددا للنشاط الإنتاجي. الجدول التالي يمثل البيانات الخاصة بهذه المشكلة:

المواد الأولية	استهلاك المواد الأولية لكل 1 منتج		مقدار المتوفر من المواد الأولية
	W_1	W_2	
S_1	2	1	1000
S_2	3	3	2400
S_3	1.5	-	600
الأسعار	30	20	

المطلوب: ما هي كمية الإنتاج من w_2,w_1 التي تجعل الإيرادات من الإنتاج أعلى ما يمكن.

الحل: في البداية يتم وضع العلاقات الرياضية الخاصة بالنموذج الرياضي لهذه المشكلة، حيث أن:

$X_1 \Leftarrow$ كمية الإنتاج من W_1

$X_2 \Leftarrow$ كمية الإنتاج من W_2

دالة الهدف هي:

(1) $F = 30X_1 + 20X_2 \rightarrow Max.$

مستوفيا الشروط التالية:

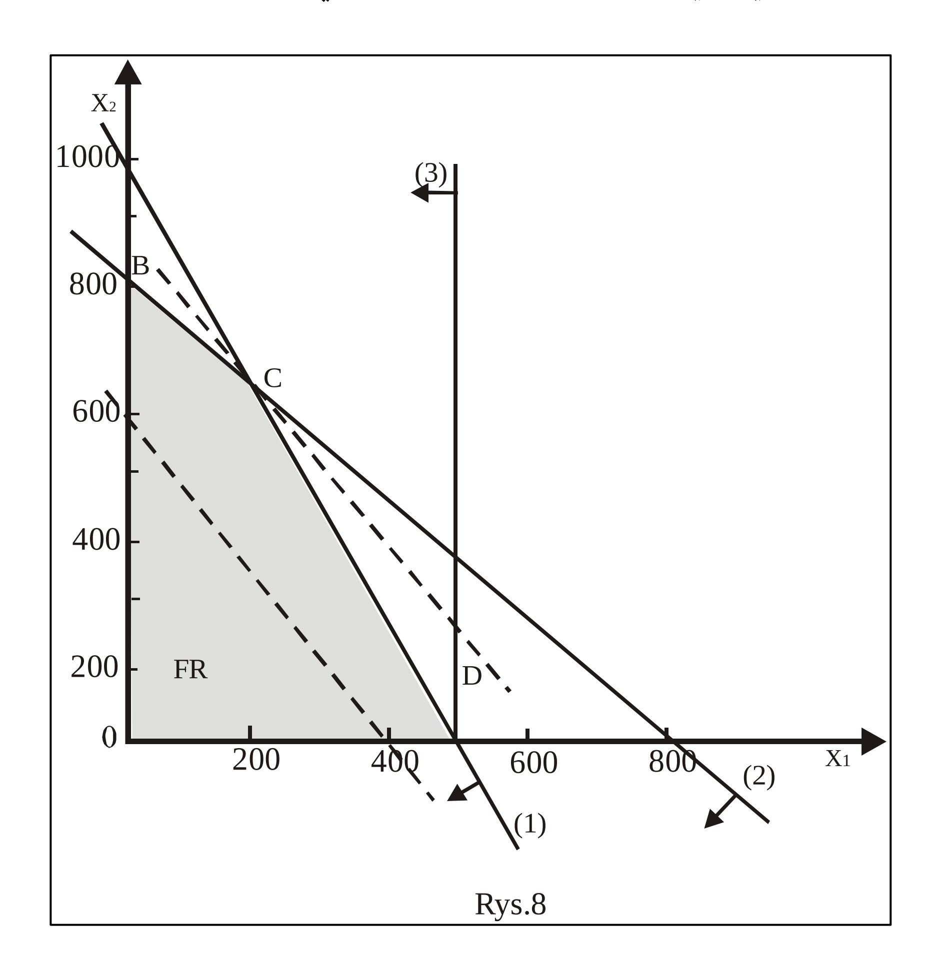
(2) $2x_1 + x_2 \leq 1000$

(3) $3x_1 + 3x_2 \leq 2400$

(4) $1.5x_1 \leq 600$

(5) $x_1, x_2 \geq 0$

الشكل البياني الذي يعبر عن هذه المشكلة هو كما يلي (Rys.8):



Rys.8

من الشكل السابق يتضح أن منطقة الحلول الممكنة FR حدودها هـيDCBOA، وأن نقطة الحل الأمثل تقع عند النقطة (200,600).

أي أن: $x_2 = 600$, $x_1 = 200$ دالة الهدف المثلى هي:

$$F(x_1, x_2) = 18000$$

إن هذه المشكلة يمكن حلها بطريقة السمبلكس (باعتماد أسلوب المصفوفات) والتوصل إلى النتائج ذاتها. ومن أجل تحقيق ذلك نضع الافتراضات التالية:

نفرض أن الرموز التي تعبر عن المتغيرات الراكدة Slack Variables هي كما يلي:

x_3= المتغير الراكد للقيمة الأولى وتمثل مقدار المواد الأولية S_1 غير المستغلة.

x_4= المتغير الراكد للقيمة الثانية وتمثل مقدار المواد الأولية S_2 غير المستغلة.

x_5= المتغير الراكد للقيمة الثالثة وتمثل مقدار المواد الأولية S_3 غير المستغلة

وعليه يصبح النموذج الرياضي السابق كما يلي:

$F= 30x_1 + 20x_1 + 0x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 \longrightarrow Max$

$2x_1 + x_2 + x_3 \;\; = 1000$

$3x_1 + 3x_2 + x_4 = 2400$

$1\text{-}5x_1 \quad +x_5 \quad = 600$

$x_1 , x_2 ,\ldots,x_5 \geq 0$

يتم نقل بيانات هذا النموذج الرياضي إلى المرحلة الأولى من جدول السمبلكس حيث تكون التغيرات الراكدة (x_5, x_4, x_3) بمثابة متغيرات أساس وأن قيم المتغيرات الأخرى (x_1 , x_2) تكون مساوية للصفر، كما هو واضح في الجدول التالي:

المرحلة الأولى من جدول السمبلكس

C_B	Cj	30	20	0	0	0	القيم الحرة ودالة
	المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	الهدف(z)
0	X_3	2	1	1	0	0	1000
0	X_4	3	3	0	1	0	2400
0	X_5	1.5	0	0	0	1	600
	zj	0	0	0	0	0	0
	Cj-zj	30	20	0	0	0	

إن قيم Zj كما ذكرنا سابقا مبدئيا تحسب حسب العلاقة:

$Zj = CB * aij \;\; (j= 1,2,\ldots,n \;\; , \;\; = 1,2,\ldots,m)$

وإذا أخذ بنظر الاعتبار عملية جمع حصيلة الضرب، فإن العلاقـة التاليـة هـي التـي تعبر عن المطلوب:

$$Zj = \sum_{i=1}^{m} C_{Bj} * aij$$

(j= 1,2,…,n)

وعلى أساس هذه العلاقة الرياضية يكون لدينا للمتغير x1 والمتغير x2 ما يلي:

$0 = 0 * 1.5 + 0 * 3 + 0 * 2 = Z_1$

$0 = 0 * 0 + 0 * 3 + 0 * 1 = Z_2$

ويتم حساب القيم (Cj- Zj) كما يلي:

X_1 القيمة في الموقع $\Rightarrow (c_1 - z_1) = 30 - 0 = 30$

X_2 القيمة في الموقع $\Rightarrow (c_2 - z_2) = 20 - 0 = 20$

إن العناصر التي تشكل مكونات النموذج الرياضي التالي:

$F = Cx \rightarrow Max$

$Ax \leq b$

$X \geq O$

يتم الحصول عليها من الجدول السابق وذلك كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1.5 & 0 \end{bmatrix}, \; I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;, b = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2400 \\ 600 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 000 \end{bmatrix}, \; x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \;, C_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إن المرحلة التالية في جدول السمبلكس نبدأ بإدخال متغير أساسي جديد وهـو ذلـك المتغير الذي يقابل أكبر قيمة موجبة في الحقل (Cj-Zj)، لذلك يقع الاختيار هنا

على المتغير x_1 لكونه يقابل المقدار 30 ويسمى العمود الذي يقع فيه هذا المتغير بالعمود المحوري، ويتم إخراج أحد متغيرات الأساس الحالية (x_5, x_4, x_3). بعد أن يتم تقسيم القيم في العمود bi على ما يقابلها من قيم في العمود المحوري (عمود x_1) حيث يقع الاختيار على القيمة x5 لكونها أقل القيم، وذلك لأن:

$$X_3 = \frac{1000}{2} = 500$$

$$X_4 = \frac{2400}{3} = 800$$

$$X_5 = \frac{600}{1.5} = 400$$

وعلى هذا الأساس فإن تشكيلة المتغيرات الأساسية للمرحلة التالية في جدول السمبلكس هي:

$$x_3, x_4, x_1$$

إن الحسابات التي ينبغي أن تتم في هذه المرحلة هي لإيجاد قيم الأعمدة $x_1, x_2, x_3,$ x_4, x_5 يعتمد ذلك على حساب المصفوفات وكما ورد سابقا يتم تحديد المصفوفة B ومقلوبها B^{-1} وكما يلي:

$$\begin{matrix} & x_3 & x_4 & x_1 \end{matrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

ويتم حساب المقلوب B^{-1} وفق الخطوات التالية:

$$B^{-1} = \frac{1}{1.5}\begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}^T = 1.5\begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -2 \\ 0 & 1.5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

إن هذه العناصر تقابل الأعمدة x_3, x_4, x_5 في المرحلة الثانية من جدول السمبلكس

وعلى أساس نفس القاعدة في اعتماد حساب المصفوفات يتم حساب بقيـة العنـاصر المطلوبة $B^{-1}A$ وذلك كما يلي:

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

العناصر التي تقابل الأعمدة x_1, x_2 في المرحلة الثانية من جدول السمبلكس

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 2400 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 1200 \\ 400 \end{bmatrix}$$

عمود قيمة المتغيرات الأساسي

$$C_B^T B^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 0 \end{bmatrix}$$

عناصر من الصف Zj وتقابل القيم x_1, x_2

$$C_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

عناصر الصف Zj تقابل القيم x_3, x_4, x_5

$$C_B^T B^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 1200 \\ 400 \end{bmatrix} = 12000$$

قيمة دالة الهدف

وعلى هذا الأساس تصبح المرحلة الثانية من جدول السمبلكس كما يلي:

المرحلة الثانية من جدول السمبلكس

C_B	Cj	30	20	0	0	0	القيم الحرة(bi)
	المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	ودالة الهدف(z)
0	X_3	0	1	1	0	$-\frac{4}{3}$	200
0	X_4	0	3	0	1	-2	1200
30	X_5	1	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	400
	zj	30	0	0	0	20	12000
	Cj-zj	0	20	0	0	-20	

في المرحلة الثانية يدخل المتغير الجديد x_2 لكونه يقابل أكبر قيمـة موجبـة في الحقـل (cj-zj)، أما المتغير الخارج فإنه يحسب كما يلي*:

$$x_3 = \frac{200}{1} = 200$$

$$x_4 = \frac{1200}{3} = 400$$

المرحلة الثالثة في جدول السمبلكس

C_B	Cj	30	20	0	0	0	القيم الحرة(bi)
	المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	ودالة الهدف(z)
20	X_2	0	1	1	0	$-\frac{4}{3}$	200
0	X_4	0	0	-3	1	2	600
30	X_1	1	0	0	0	$\frac{2}{3}$	400
	zj	30	20	20	0	$-\frac{20}{3}$	16000
	Cj-zj	0	0	-20	0	$\frac{20}{3}$	

* إذا كان العمود المحوري الذي كما ذكرنا يقع تحت المتغير الداخل، يحوي قيم سالبة أو أصفار، فإنهـا لا تؤخـذ بعـين الاعتبار في الحسابات المتعلقة بتحديد المتغير الخارج في المرحلة الجديدة من جدول السمبلكس.

من الجدول الثالث يتضح أن النتائج لا تزال بعيدة عن الحل الأمثـل، وذلـك لوجـود قيمة موجبة واقعة في نهاية الصف (cj-zj) وهي القيمة $\frac{20}{3}$ ونقع تحت المتغـير x_5، لـذلك سوف يكون هو المتغير الداخل، أما المتغير الخارج فيحسب على النحو التالي:

$$x_4 = \frac{600}{2} = 300$$

$$x_1 = \frac{400}{\frac{2}{3}} = 600$$

لذلك يعتبر المتغير x_4 هو الخارج. وعندها يـتم تنظـيم المرحلـة الرابعـة مـن جـدول السمبلكس وكما يلي:

المرحلة الرابعة من جدول السمبلكس

C_B	Cj	30	20	0	0	0	القيم الحرة(bi)
	المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	ودالة الهدف(z)
20	X_2	0	1	-1	$\frac{2}{3}$	0	600
0	X_5	0	0	-1.5	2.5	1	300
30	X_1	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	200
	zj	30	20	10	$-\frac{10}{3}$	0	18000
	Cj-zj	0	0	-10	$-\frac{10}{3}$	0	

من الجدول الأخير يتضح أن كل قيم الحقل (Cj-Zj) هي سالبة وأصـفار لـذلك يعتـبر هذا الحل هو الأمثل، ويلاحظ من الجداول السابقة أن قيمة الدالة قد ارتفعت من صـفر إلى 18000، يضاف إلى ذلك ملاحظة مهمة وهي أن نتائج كل جدول تقابل

الزوايا الموضحة بالشكل البياني في بداية الحل والتي تمثل منطقة الحلول الممكنة FR، حيث الزاوية O تقابل المرحلة الابتدائية والزاوية A تقابل المرحلة الثانية والزاوية D تقابل المرحلة الثالثة، والزاوية C تقابل المرحلة الرابعة والأخيرة والتي عندها الحل الأمثل. وبشكل عام يمكن إعادة الحسابات السابقة من قبيل التحقق من صحة النتائج وباستخدام حساب المصفوفات وعلى أساس آخر ما تم التوصل إليه في المرحلة الرابعة من متغيرات أساسية وهي x_2, x_5, x_1 وعليه فإن:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

وأن المصفوفة B و B^{-1} هي كما يلي:

$$\begin{matrix} & x_2 & x_5 & x_1 \end{matrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1.5 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & -4.5 & 3 \\ 2 & 1.5 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

عناصر المصفوفة التي تناظر المتغيرات الراكدة x3, x4,x5

وعلى هذا الأساس:

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

عناصر المصفوفة التي تناظر المتغيرات الأساسية

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 2400 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000+1600+0 \\ -1500+1200+600 \\ 1000-800+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

قيمة المتغيرات الأساسية

$$C_B = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix} \Rightarrow C_b^T B^{-1} A = [20\ \ 0\ \ 30] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [30 \quad 20]$$ عناصر الصف Zj لمتغيرات القرار

$$C_B^T B^{-1} = [20\ \ 0\ \ 30] \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = [10 \quad \tfrac{10}{3} \quad 0]$$ عناصر الصف Zj للمتغيرات الراكدة

$$C - B_B^T B^{-1} A = [30\ \ 20] - [30 \quad 20] = [0 \quad 0],\ -C_b^T B^{-1} [-10 \quad -\tfrac{10}{3} \quad 0]$$ عناصر الصف الصفري

$$C_B^T B^{-1} b = [30\ \ 0\ \ 20] \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix} = 12000 + 0 + 6000 = 18000$$ قيمة دالة الهدف

وعليه فإن الحل الأمثل هو:

$$X_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

وهو يعني: $F(x_1, x_2) = 1800,\ x_2 = 600\ ,\ x_1 = 200$ وأن قيمة $x_5=300$ وهو يعني بقاء فائض من المادة الأولية S_3 بمقدار 300 كغم.

مثال رقم ❷

نعود مرة أخرى إلى المثال السابق

$F = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow Max.$

$2x_1 + x_2 \leq 1000$

$3x_1 + 3x_2 \leq 240$

$1.5x_1 \leq 600$

$x_1 , x_2 \geq 0$

إن هذه الصيغة الأولية يمكن إعادة كتابتها وفق صيغة النموذج المقابل وذلك كما يلي:

$W = 1000y_1 + 2400y_2 + 600y_3 \rightarrow Min$

$2y_1 + 3y_2 + 1.5y_3 \geq 30$

$y_1 + 3y_2 \geq 20$

$y_1, y_2 , y_3 \geq 0$

لتحويل هذه الصيغة القانونية Canonical form إلى الصيغة القياسية Standard form، يتطلب الأمر كما ورد معنا في فقرات سابقة طرح وإضافة نوعين من المتغيرات:

1- المتغيرات الفائض (y_4, y_5)

2- المتغيرات الاصطناعية (R_1, R_2).

$W= 1000y_1 + 2400y_2 + 600y_3 + 0.y_4 + 0.y_5 + MR_1+MR_2 \rightarrow Min.$

$2y_1 + 3y_2 + 1.5y_3 - y_4 + R_1 = 30$

$y_1 + 3y_2 - y_5 + R_2 = 20$

$y_1, y_2, y_3, y_4, y_4, y_5 \geq 0$

$R_1, R_2 \geq 0$

حيث أن[1]: كمية كبيرة جدا ⇐M

إن بيانات النموذج الرياضي لهذه المشكلة يتم تفريغها في المرحلة الأولى من جـدول السمبلكس وذلك كما يلي:

المرحلة الأولى من جدول السمبلكس

C_B	Cj	1000	2400	600	0	0	M	M	القيم الحرة(bi) ودالة الهدف(z)
	المتغيرات الأساسية	y_1	y_2	y_3	Y_4	y_5	R_1	R_2	
M	R_1	2	3	1.5	-1	0	1	0	30
M	R_2	1	3	0	0	-1	0	1	20
	zj	3M	6M	1.5M	-M	-M	M	M	50M
	Cj-zj	1000-38	2400-6M	600-1.5M	M	M	0	0	

من الجدول السابق يتضح أن المتغير y_2 يقابل أكبر قيمة سالبة في الصف (cj-zj) لذلك يعتبر هو المتغير الداخل والعمود الذي يقع فيه المتغير y_2 هو العمود المحوري. أما المتغـير الخارج فهو المتغير R_2 لكونه يؤدي إلى الحصول على أقل قيمـة، وعـلى هـذا الأسـاس فـإن المرحلة الثانية من جدول السمبلكس هي كما يلي:

المرحلة الثانية من جدول السمبلكس

C_B	Cj	1000	2400	600	0	0	M	M	القيم الحرة(bi) ودالة الهدف(z)
	المتغيرات الأساسية	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	R_1	R_2	
M	R_1	1	0	1.5	-1	1	1	-1	10
2400	R_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{20}{3}$
	zj	800+M	2400	1.5M	-M	M-800	M	800-M	16000+10M
	Cj-Zj	200-M	0	600-1.5M	M	800-M	0	-800+2M	

(1) يمكن على سبيل الافتراض أن تكون قيمة M⇐1000.

في المرحلة التالية من جدول السمبلكس يتم إدخال المتغير y3 في محل المتغير R1، حيث أن:

$$R_1 \Rightarrow \frac{10}{1.5} = \frac{20}{3}$$

$$y_1 \Rightarrow \frac{\frac{20}{3}}{0} = \infty$$

إن ظهور هذه النتيجة يعني إهمال (∞) واعتماد النتيجة $\left(\frac{20}{3}\right)$ باعتباره هو المتغير الخارج، وبغض النظر عن هذه النتيجة يمكن التحيز لصالح إخراج المتغير R_1 وإبعاده بأسرع ما يمكن عن النتائج النهائية للمشكلة. وعليه فإن المرحلة الثالثة من جدول السمبلكس هي كما يلي:

المرحلة الثالثة من جدول السمبلكس

C_B	Cj	1000	2400	600	0	0	M	M	القيم الحرة(bi) ودالة الهدف(z)
	المتغيرات الأساسية	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	R_1	R_2	
600	y_1	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{20}{3}$
2400	y_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{20}{3}$
	zj	1200	2400	600	-400	-400	400	400	20000
	Cj-Zj	-200	0	0	400	400	M-400	M-400	

النتائج الواردة في الجدول أعلاه لا تمثل الحل الأمثل، وذلك لأن في الحقل الأخير (cj-zj) لا تزال هناك قيم سالبة، وهو يعني أن بالإمكان تدنية قيمة دالة الهدف أكثر من ذلك، لذلك يتم إدخال المتغير y_1[1]، أما المتغير الخارج في هذه الحالة فهو y_3، لأن:

(1) تم استثناء القيم الواردة في العمودين الأخيرين M, M لأن قيمة∞← M لذلك فإن≈∞ M-400، إضافة إلى ذلك وطالما تم تحيد قيمة M شكل افتراضي وهو بحدود 1000، فإن ذلك يعني أن (1000-400=600) وهي قيمة موجبة خارجة عن الاهتمام، يضاف إلى ما تقدم من حيث الأساس يوجد مبدأ عام وهو استبعاد ظهور قيم R,M في النتائج النهائية.

$$y_3 = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{2}{3}} = 10$$

$$y_2 = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{1}{3}} = 20$$

وعلى أساس ما تقدم الصيغة التالية لجدول السمبلكس هي كما يلي:

المرحلة الرابعة والأخيرة من جدول السمبلكس

C_B	Cj	1000	2400	600	0	0	M	M	القيم الحرة(bi) ودالة الهدف(z)
	المتغيرات الأساسية	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	R_1	R_2	
1000	y_1	1	0	1.5	-1	-1	1	-1	10
2400	y_2	0	1	-0.5	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$
	zj	1000	2400	300	-M	-600	200	600	18000
	Cj-Zj	0	0	300	M	600	-200+M	-600+M	

من الجدول السابق يتضح أن القيم من الحقل (cj-zj) تتصف بما يلي:

القيم المقابلة للمتغيرات الأساسية y_1,y_2 ⇐ صفرية.

القيم المقابلة للمتغيرات غير الأساسية ⇐ موجبة.

لذلك يعتبر هذا الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأمثل. وفيما يلي توضيح للعمليات الحسابية السابقة على أساس حساب المصفوفات وذلك من قبيل التحقق من صحة النتائج:

$$y_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

لذلك فإن:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (y_1 \; y_2)$$

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

عناصر المتغيرات الاصطناعية R_1,R_2 ضمن الأعمدة الخاصة بها

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1.5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

عناصر الأعمدة تحت المتغيرات الأساسية y_1,y_2,y_3

$$B^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

يتم متغيرات الأساس (النتائج النهائية)

$$C_B = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2400 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن:

$$C_B^T B^{-1} = [1000 \quad 2400] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = [200 \quad 600]$$

من عناصر الصف Zj تحت R_2m R_1

$$C_B^T B^{-1}A = [1000 \quad 2400] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{bmatrix} = [1000 \quad 2400 \quad 300]$$

من عناصر الصف Zj وتقع تحت y_1, y_2, y_3

$$C_B^T B^{-1}b = [1000 \quad 2400] \begin{bmatrix} 10 \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix} = 1000 + 8000 = 18000$$

قيمة دالة الهدف

وعلى أساس ما تقدم فإن النتائج النهائية التي تعبر عن الحل الأمثل بموجب الصيغة الثنائية، هي كما يلي:

$y_1 = 10$

$y_2 = \frac{10}{3}$

$F(y_1, y_2) = 18000$

إن النتائج التي تم الحصول عليها في ظل النموذج المقابل ترتبط بشكل دقيق بالنتائج التي تم الحصول عليها في ظل استخدام النموذج الأولي، ومن ذلك نلاحظ أن القيم الواردة في الحقل (cj-zj) والتي تقابل المتغيرات الفائضة، فإنها تقابل القيم للمتغيرات الأساسية التي وردت في الجدول الأخير، يضاف إلى ما تقدم تطابق قيمة دالة الهدف 18000 في كلا الحالتين. كما أن القيم الواردة في مقابل القيم الراكدة x_1, x_5, x_2 في الصيغة الأولية (x_3, x_4, x_5) $\left(-10, -\frac{10}{3}, 0\right)$ تقابل القيم للمتغيرات الأساسية في حالة الصيغة المقابلة مع اختلاف الإشارة، أي:

$y_1 = 10$

$y_2 = \frac{10}{3}$

(لكونه غير ظاهر) $y_3 = 0$

4.3 استخدام البرامجيات والحاسوب

إن زيادة عدد المتغيرات والقيود في المشكلة وتعقيد المشكلة يستدعي اللجوء إلى أساليب وتقنيات تستوعب هذه الحالة، هذا إضافة إلى أن اعتماد البرامجيات الجاهزة والحاسوب يضمن الحصول على نتائج نهائية دقيقة جدا وبسرعة كبيرة جدا تصل في بعض الأحيان إلى ثواني معدودات، ومن هذه البرامجيات على سبيل المثال لا الحصر:

1- Win Q.S.B

2- Q.S.B+

3- TORA

4- Q.M

ويعتبر برنامج Win Q.S.B من البرامج الحديثة والمتطورة، وفيما يلي توضيح لاستخدامها في مجال معالجة بعض المشاكل الإنتاجية.

مثال رقم ❶

إحدى المنشآت الإنتاجية المتخصصة بصناعة الإطارات للسيارات الصغيرة والمتوسطة والكبيرة، ترغب في طرح عدد من الأنواع من هذه الإطارات وترغب هذه المنشأة في اختيار نوع واحد أو أكثر من بين عدد من أنواع الإطار المرشحة للإنتاج بحيث يكون هذا النوع هو البديل الفائز على غيره من حيث تحقيق الاستغلال الأمثل لما هو متوفر من المواد الأولية ويحقق أعلى عائد ممكن من الأرباح.

حدد الدائرة التجارية في هذه المنشأة بالتنسيق مع دائرة الحسابات نوعية الإطارات المرشحة مع الربح المتوقع من بيع كل واحد في هذه الإطارات كما في الجدول ا لتالي:

التسلسل	حجم الإطار وقياسه	رمز المتغير للكمية (أو العدد)	الربح المتوقع (بالدولار)
1	إطار صغير 13/145	X_1	0.773
2	إطار صغير 13/164	X_2	0.143
3	إطار صغير 13/70/175	X_3	6.273
4	إطار متوسط 14/70/195	X_4	9.373
5	إطار متوسط 14/75/195	X_5	7.473
6	إطار متوسط 14/75/185	X_6	10.573
7	إطار كبير 15/75/215	X_7	7.673

إن إدارة الإنتاج في المنشأة المذكورة حددت الاحتياجات المطلوبة من المواد الأولية الأساسية والمساعدة لكل واحد من الإطارات السبعة المرشحة للإنتاج كما هو واضح في الجدول (3-5/أ) والجدول (3-5/ب). [1]

المطلوب:

ما هو الإطار الذي سوف يتم ترشيحه للإنتاج من الإطارات الوارد ذكرها أعلاه بما يؤدي إلى تحقيق الاستغلال الأمثل لما هو متاح من كميات في هذه المواد الأساسية والمساعدة مع بيان أقصى ربح ممكن يتوقع الحصول عليه.

(1) المثال مستمد من الواقع العملي للشركة العامة للإطارات في العراق، حيث ورد المثال في الجانب العملي في أطروحة الدكتوراه للباحث يوسف الطائي والموسومة (أثر تطبيقات إدارة الجودة الشاملة في الكفاءة الإنتاجية لتحقيق الأمثلية) مقدمة إلى مجلس كلية الإدارة والاقتصاد في الجامعة المستنصرية في العراق تحت إشراف د.مؤيد الفضل في سنة 1999.

جدول رقم (3-5/أ)

جدول رقم (3–5/أ) مقدار المطلوب من المواد الأولية الأساسية لكل واحد من الإطارات السبعة

الكمية المتاحة اليومية	الإطار 185/75/15	الإطار 185/75/15	الإطار 195/75/14	الإطار 195/70/13	الإطار 175/70/13	الإطار 165/13	الإطار 145/13	الحجم المواد الأولية	ت
4545	3.222	2.503	2.645	2.598	1.918	1.920	1.794	مطاط طبيعي	1
949	0.666	0.430	0.445	0.465	0.305	0.326	0.326	مطاط صناعي BR-CIS	2
1736	2.053	1.598	1.720	1.682	1.440	1.318	0.939	مطاط صناعي SBR 1502	3
1112	0.601	0.508	0.526	0.515	0.419	0.419	0.375	أسود الكاربون N-660	4
1540	1.436	1.065	1.141	1.119	0.941	0.862	0.639	أسود الكاربون N-375	5
1859	1.305	0961	1.030	1.015	0.720	0.720	0.679	أسود الكاربون N-326	6
349	0.283	0.216	0.230	0.225	0.177	0.171	0.146	أوكسيد الزنك ZnO	7
129	0.100	0.75	0.079	0.079	0.061	0.059	0.050	حامض الستايك	8
120	0.132	0.102	0.108	0.106	0.083	0.081	0.069	كبريت S.R.S	9
8.5	0.005	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003	PCTP-50	10
67	0.053	0.39	0.040	0.039	0.030	0.030	0.030	فينول تاك رون	11
103	0.093	0.067	0.071	0.071	0.053	0.052	0.045	مانع الأكسدة 6PPD	12
27	0.036	0.028	0.030	0.029	0.025	0.023	0.017	مانع الأكسدة TMQ	13
18	0.020	0.016	0.016	0.016	0.012	0.012	0.011	OBTS/mBS	14
23	0.044	0.032	0.035	0.034	0.028	0.026	0.020	معجل CBS	15

جدول رقم (3-5/ب مقدار المطلوب من المواد الأولية الأساسية لكل واحد من الإطارات السبعة

الكمية المتاحة اليومية	الإطار 185/75/15	الإطار 185/75/15	الإطار 195/75/14	الإطار 195/70/13	الإطار 175/70/13	الإطار 165/13	الإطار 145/13	الحجم المواد الأولية	ت
14	0.012	0.009	0.010	0.009	0.007	0.007	0.006	مبطئ CBS	16
6.5	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	معجل DCBS	17
7	0.006	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	0.003	ستارات الكوبلت C.S	18
29	0.030	0.018	0.018	0.018	0.012	0.012	0.016	رينفورسفك رزن RER	19
5.4	0.006	0.006	0.005	0.006	0.006	0.003	0.003	HMT	20
10	0.012	0.012	0.014	0.013	0.007	0.006	0.006	رينفورسفك رزن/ سياريك أسد	21
37	0.050	0.034	0.036	0.037	0.027	0.027	0.023	MicroWax	22
411	0.483	0.393	0.413	0.405	0.335	0.327	0.266	ركليم	23
595	0.732	0.562	0.602	0.593	0.482	0.452	0.345	زيت الأحامي	24
474	0.54	0.35	0.35	0.35	0.26	0.21	0.21	أسلاك البيد	25
947	0.84	0.62	0.96	0.68	0.55	0.52	0.52	أسلاك ناعمة	26
412	0.45	0.39	0.38	0.37	0.26	0.26	0.25	نسيج نايلون F100	27
	13.22	**9.99**	**10.65**	**10.49**	**8.17**	**7.85**	**6.79**	**المجموع**	

الحل:

تم الاستعانة في هذه المشكلة ببرنامج (Win Q.S.B). وقد تم إدخال البيانات السابقة إلى الحاسوب بعد تهيئتها بشكل ومتطلبات هذا البرنامج، وتم الحصول على النتائج التالية:

Summarized Result For Xj			
المتغيرات Variables		الحل	الكلف الفرصية
Number	Name	Solution	Opportunity Cost
1	X_1	0	6260.0767
2	X_2	884.61536	0
3	X_3	0	3573.3079
4	X_4	0	2583.2312
5	X_5	0	4834.8843
6	X_6	0	679.92285
7	X_7	0	7799.7690
8	S_1	2846.5383	0
9	S_2	660.61536	0
10	S_3	570.07703	0
11	S_4	743.11542	0
12	S_5	777.46155	0
13	S_6	1222.077	0
14	S_7	197.73077	0
15	S_8	76.807693	0
16	S_9	48.346153	0
17	S_{10}	82.346153	0
18	S_{11}	40.461540	0
19	S_{12}	57.0000	0
20	S_{13}	6.6538467	351653.84

Summarized Result For Xj			
المتغيرات Variables		الكلف الفرصية الحل	
Number	Name	Solution	Opportunity Cost
21	S_{14}	7.3846154	0
22	S_{15}	0	0
23	S_{16}	7.8076925	0
24	S_{17}	64.115387	0
25	S_{18}	66.461540	0
26	S_{19}	18.384615	0
27	S_{20}	51.346153	0
28	S_{21}	4.6923075	0
29	S_{22}	13.115384	0
30	S_{23}	121.73078	0
31	S_{24}	195.15385	0
32	S_{25}	288.23077	0
33	S_{26}	487.00003	0
34	S_{27}	182.00002	0

* maximum Objective Function = 8088039 , Iteation = 2.

على أساس ما تقدم يتبين لنا أن كمية الإنتاج التي يمكن اعتمادها هي X2 وتساوي 884.61536 وعدم إنتاج كميات من X1, x3, x4, x5, x6, x7 حيث أن قيمة دالة الهدف (الأرباح الكلية المتوقعة) بحدود 8088039 وهو أقصى ما يمكن الحصول عليه وتحقق ذلك في مرحلة رقم 2 (Iteration=2)، وهو يعني طرح إطار صغير بقياس 13/165 وذلك بحدود (885) إطار يوميا كخطة إنتاج يومية. إن برنامج Win Q.S.B يقدم تحليلات كمية ومؤشرات يستفيد منها المخطط في المنشأة، وهذه التحليلات هي كما في الجدول التالي:

جدول نتائج حل النموذج لاختيار أفضل مزيج من المنتجات وتحديد كميـة الفـائض من المواد الأولية

	Constraint	Left hand Side	Direction	Right hand side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C_1	1.763.889	<=	4.545.0000	2.781.1110	0
2	C_2	313.7100	<=	949.0000	635.2900	0
3	C_3	1.139.482	<=	1.736.0000	596.5181	0
4	C_4	350.968	<=	1.112.0000	761.0320	0
5	C_5	758.283	<=	1.540.0000	781.7170	0
6	C_6	687.251	<=	1.859.0000	1.171.7490	0
7	C_7	152.676	<=	349.0000	196.324	0
8	C_8	128.438	<=	129.0000	0.5620	0
9	C_9	71.945	<=	120.0000	48.0460	0
10	C_{10}	2.732	<=	8.50000	5.7680	0
11	C_{11}	65.598	<=	67.0000	1.4020	0
12	C_{12}	48.049	<=	103.0000	54.9510	0
13	C_{13}	19.696	<=	27.0000	7.3040	0
14	C_{14}	10.928	<=	18.0000	7.0720	0
15	C_{15}	23.0000	<=	23.0000	0	0
16	C_{16}	6.147	<=	14.0000	7.8530	330.406.2
17	C_{17}	0.683	<=	6.50000	5.8170	0
18	C_{18}	3.415	<=	7.0000	3.5850	0
19	C_{19}	12.294	<=	29.0000	16.7060	0
20	C_{20}	4.0980	<=	5.4000	1.3020	0
21	C_{21}	8.7680	<=	10.0000	1.2320	0
22	C_{22}	25.9370	<=	37.0000	11.0630	0
23	C_{23}	275.2830	<=	411.0000	135.7170	0
24	C_{24}	401.5780	<=	595.0000	193.4220	0
25	C_{25}	239.0500	<=	474.0000	234.9500	0
26	C_{26}	457.7800	<=	947.0000	539.2200	0
27	C_{27}	254.9300	<=	412.0000	157.0700	0

مثال رقم ❷

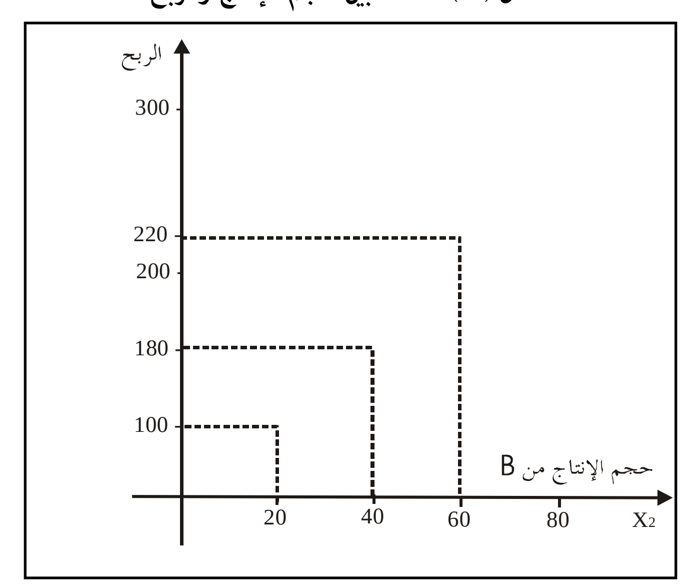
منشأة متخصصة بإنتاج نوعين من المنتجات B,A، ولغرض تكوين هذه المنتجات يتطلب الأمر استخدام ثلاثة أنواع من مستلزمات الإنتاج الأساسية (مواد أولية، ساعات عمل، طاقة كهربائية). البيانات المتعلقة بهذه المشكلة كما في الجدول التالي:

جدول (3-6) بيانات المشكلة

مستلزمات الإنتاج الأساسية	المنتجات		المتوفرة من مستلزمات الإنتاج الأساسية
	A	B	
المواد الأولية	1	2	115
ساعات العمل	2	1	80
الطاقة الكهربائية	0	1	60

إن الربح المتوقع من بيع المنتج A ثابت ويبلغ 4 دينارا أما بالنسبة للمنتج B فإن الربح المتوقع من البيع يعتمد على حجم الإنتاج من المنتج نفسه. إن علاقة الربح بحجم الإنتاج المتحقق من المنتج B يتضح من خلال الشكل البياني التالي:

الشكل (3-3) العلاقة بين حجم الإنتاج والربح



المطلوب:

هو إعداد خطة إنتاج يتم بموجبها اعتماد مقدار الربح المتحقق كمؤشر للأمثلية.

الحل:

نفرض أن X هو الرمز المعبر عن حجم الإنتاج.

عليه فإن: $X_1 \rightarrow$ حجم الإنتاج من المنتج A

$X_2 \rightarrow$ حجم الإنتاج من المنتج B

على أساس البيانات الواردة في الجدول (3-6) نحصل على النموذج الرياضي التالي:

$$X_1 + 2X_2 \leq 115$$

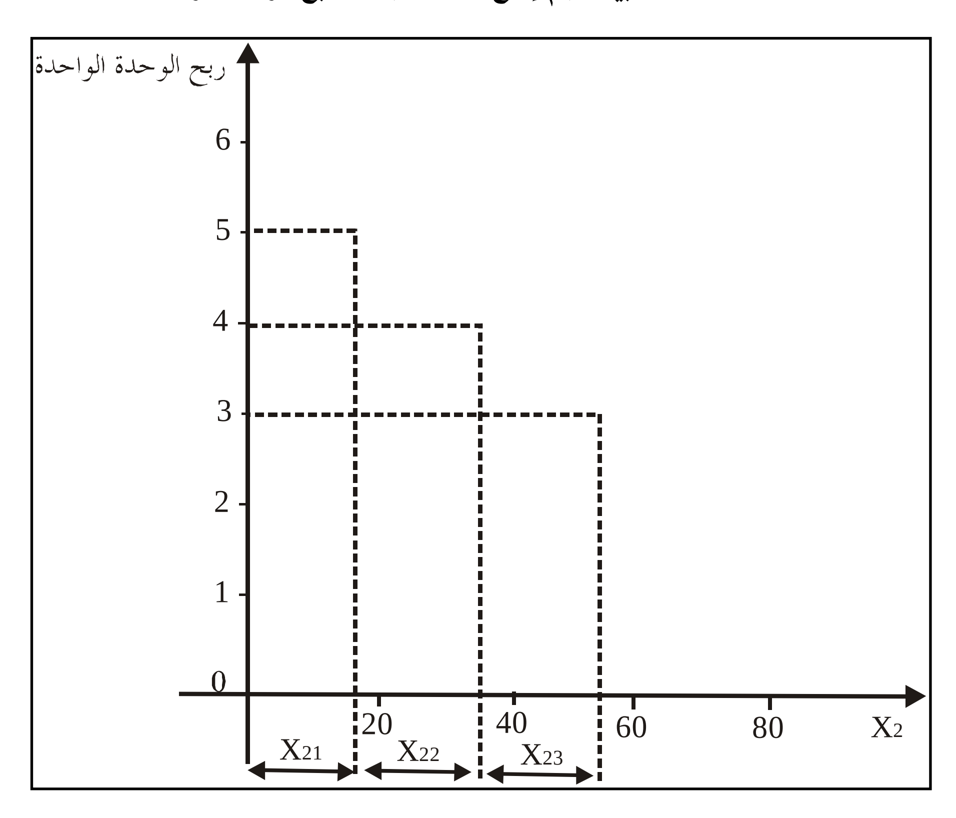
$$2X_1 + X_2 \leq 80$$

$$X_2 \geq 60$$

$$X_1 \geq 0 \text{ , } X2 \geq 0$$

من الشكل البياني (3-3) يمكن أن نستنتج طبيعة العلاقة بين ربح الوحدة الواحدة وبين حجم الإنتاج المعبر عنه بالرمز X_2، إن هذه العلاقة يمكن عرضها من خلال الشكل البياني التالي:

الشكل (3-4) العلاقة بين حجم إنتاج أحد المنتجات وربح الوحدة الواحدة



مـن أجـل توضـيح فكـرة العلاقـة بـين الـربح وحجـم الإنتـاج تأخـذ المتغـيرات X_{21} , X_{22}, X_{23} حيث أن:

$X_2 = X_{21} + X_{22} + X_{23}$

$X=_{21} \leq 20.X_{24} \leq _{20}$

إن دالة الهدف التي ينبغي تعظيمها، يمكن صياغتها كما يلي:

$Z = 4_{X1} + 5X_{21} + 4X_{22} + 3X_{24}$

$X_{21} \leq 20$

$X_{22} \leq 20$

$X_{23} \leq 20$

وبعد التبسيط نحصل على ما يلي:

$$X_1 + 2X_{21} + 2X_{22} + 2X_{23} \leq 115$$

$$2X_1 + X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 80$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 60$$

$$X_{21} \leq 20$$

$$X_{22} \leq 20$$

$$X_{23} \leq 20$$

حيث أن:

$$X_1 \geq 0, X_{21} \geq 0 , X_{22} \geq 0 , X_{23} \geq 0$$

يتم تهيئة وإعداد هذا النموذج الرياضي من أجل إدخال بياناته إلى الحاسبة الإلكترونية وذلك كما يلي:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & \\ x_1 & x_{21} & x_{22} & x_{24} & & R.H.S \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \end{array} \begin{bmatrix} 115 \\ 80 \\ 60 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

إن النتائج النهائية التي يتم الحصول عليها من الحاسبة هي كما يلي:

Decision Solution unit cost or Total R

Educed Basis Allowable

Allowable

Variable Value Profit c(j) Contribution C

Ost Status Min. C(j)

Max. C(j) قيمة المتغيرات

1 X_1 15.0000 4.0000 60.0000 0 Basic 2.0000 8

.0000 05.0000

2 X_2 20.0000 100.00000 0 Basic 4

.0000 4.0000

3 X_3 30.0000 120.0000 0 Basic 3

.0000 5.0000 3.0000

4 X_4 0 0 -1.0000 at bound -

M 4.0000

Objective Function (Min.) = 280.0000 دالة الهدف

Left Hand Right Hand Slack S

Hadow Allowable

Allowable

Constraint side Direction Side Or Surplu

S Price Min.RHS

Max. RHS

1 C_1 115.0000≤ 115.0000 0 1

.3333 70.0000 130.0000

2 C_2 80.0000<= 80.0000 0 1.3333 57.5000 1

70.0000

3 C_3 50.0000<= 60.0000 10.0000 0 50.0000 M

4 C_4 20.0000<= 20.0000 0 1.0000 0 2

0.0000

5 C_5 20.0000<= 20.0000 0 0 20.0000 M

6 C_6 0 20.0000 20.0000 0 0 M

من النتائج السابقة نستنتج ما يلي:

$15 \leftarrow X_1$

$20 \leftarrow X_{21}$

$20 \leftarrow X_{22}$

$10 \leftarrow X_{23}$

أي أن:

$X_2 = X_{21} + {}_{22} + X_{23} = 50$

وإن قيمة دالة الهدف هي:

وحدة نقدية $Z = 280$

مثال رقم ❸

إحدى المنشآت المتخصصة بتربية وتسمين الأبقار ترغب في رفع مستوى القيمة الغذائية للأعلاف التي تحصل عليها من المصانع الأخرى تشترط المنشأة توفر ثلاثة عناصر أساسية وهي C.B.A. وفي كل شهر ينبغي أن يكون مجموع ما يحصل عليه الحيوان الواحدة من العنصر A هو 600 كيلو غرام، ومن العنصر الثاني B هو 1000كيلو غرام ومن العنصر الثالث 400 كيلو غرام.

حصلت إدارة المشتريات والتسويق في المنشأة على عرض لشراء نوعين من الأعلاف هي N,M التي يدخل في تركيبها العناصر الأساسية الثلاث. حيث أن الوحدة الواحدة من العلف m يحوي مقادير معينة من العناصر المذكورة، وهي: 2 كيلو غرام من العنصر 3,A كيلو غرام من العنصر B. في حين أن الوحدة الواحدة في المنتج N تحوي:

1 كيلو غرام من العنصر A
2 كيلو غرام من العنصر B
2 كيلو غرام من العنصر C

إن الوحدة N في العلف تكلف المصنع 4 وحدة نقدية، في حين أن تكاليف إنتاج العلف M ليست ثابتة. حيث إنها تزداد إذا زادت الكمية المطلوبة من قبل المنشأة. إذ أن ذلك يستلزم جمع الكميات الإضافية المطلوبة من مراكز تجميع وخزن أخرى متمركزة في مواقع جغرافية متباينة البعد عن موقع المصنع الرئيسي.

ويترتب على هذا بالنتيجة زيادة كلفة شراء الوحدة الواحدة من العلف M بالنسبة للمنشأة[1].

إن تكاليف شراء العلف M (بما في ذلك تكاليف تسويقها إلى المنشأة) التي تعتمد على حجم الكمية التي ينبغي شرائها من قبل المنشأة تتضح من خلال الشكل البياني التالي:

(1) على افتراض عدم وجود مصدر آخر لشراء نفس العلف بكلفة أقل.

الشكل (3-5) العلاقة بين حجم المشتريات وتكاليف شراء الوحدة الواحدة

تكاليف شراء الوحدة الواحدة من M
3200
2200
600
0
100 200 300 400
حجم المشتريات من العلف الحيواني

المطلوب: تحديد مقدار الكمية المثلى من العلف N, M ينبغي على إدارة المشتريات والتسويق في المنشآت شرائها بحيث تكون تكاليف الشراء الكلية أقل ما يمكن[1].

الحل:

نفرض أن X هو رمز لحجم الكمية من الأعلاف الواجب شرائها عليه فإن:

X_1 ← حجم الكمية الواجب شرائها من العلف M.

X_2 ← حجم الكمية الواجب شرائها من العلف N.

إن بيانات المشكلة يمكن عرضها من خلال الجدول التالي:

مجموع ما ينبغي أن يحصل عليه الحيوان من العناصر الأساسية للعلف	نوع العلف		العناصر الأساسية للعلف
	N	M	
600 كيلو غرام	1	2	A
1000 كيلو غرام	2	3	B
400 كيلو غرام	2	0	C

(1) إن مؤشر الأمثلية في هذه الحالة هو تكاليف الشراء الكلية للمنتج زائدا تكاليف تسويقه إلى مخازن المنشأة التي ينبغي أن تكون أقل ما يمكن.

على أساس بيانات الجدول السابق يتم صياغة النموذج الرياضي للمشكلة وكما يلي:

1. القيود الأساسية:

$2X_1 =+ X_2 \geq 600$ قيمة العنصر A

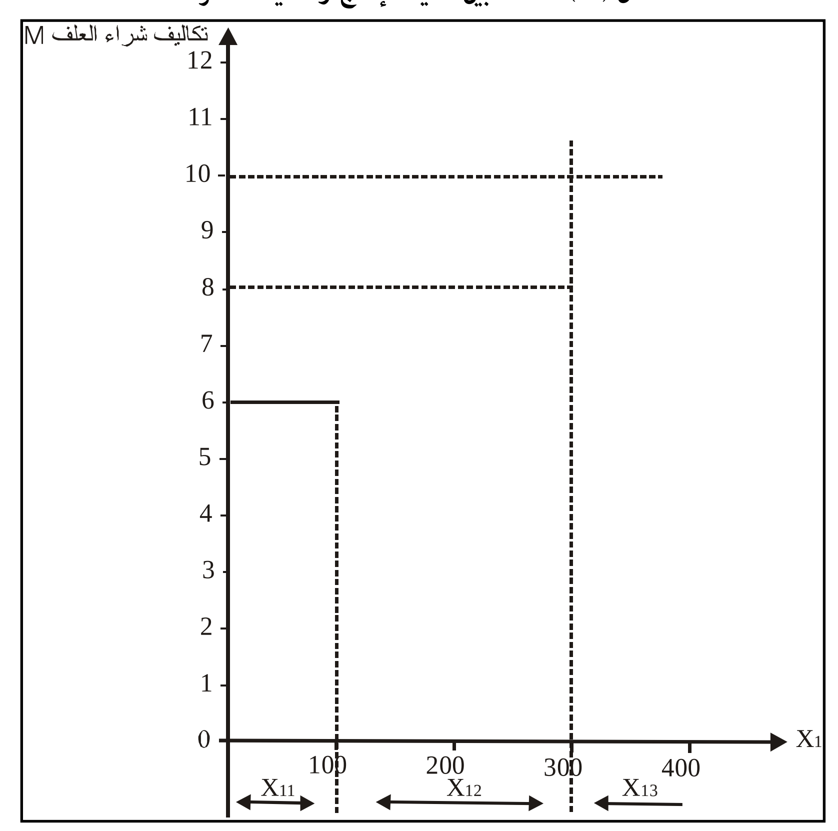
$3X_1 + 2X_2 \geq 1000$ قيمة العنصر B

$2X_2 \geq 400$ قيمة العنصر C

2. القيود اللاسلبية $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

أما بالنسبة لدالة الهدف Z فإن تحديد صيغتها يتم في ضوء المؤشرات المستمدة من الشكل البياني السابق وكذلك الشكل البياني التالي:

الشكل (3-6) العلاقة بين كمية الإنتاج وتكاليف الشراء



إن توضيح فلسفة العلاقة بين تكاليف شراء الوحدة الواحدة من العلف M مع حجم الكمية المشتراة X_1 يتطلب افتراض متغيرات جديدة هي:

X_{11}, X_{12}, X_{13} علما بأن هذه المتغيرات هي أجزاء للمتغير X_1 حيث أن:

$$X_1 = X_{11} + X_{12} + X_{13}$$

حيث أن:

$$0 \le X_{11} \le 100$$

$$0 \le X_{12} \le 100$$

أما دالة الهدف فهي كما يلي:

$$Z = 6X_{11} + 8X_{12} + 10X_{13} + 4X_2 \rightarrow Min$$

ويمكن إعادة صياغة القيود السابقة مع التعويض لتصبح كما يلي:

$$2X_{11} + 2X_{12} + 2X_{13} + X_2 \ge 600$$
$$3X_{11} + 3X_{12} + 3X_{13} + 2X_2 \ge 1000$$
$$2X_2 \ge 400$$
$$X_{11} \ge 100$$
$$X_{12} \ge 200$$

الشروط المنطقية هي:

$$X_{11} \ge 0, X_{12} \ge 0, X_{13} \ge 0, X_2 \ge 0$$

إن حل هذه المشكلة باستخدام الحاسوب يتطلب في البداية تهيئة البيانات على النحو التالي:

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$x_1 \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_2 \qquad$ R.H.S

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ge \\ \ge \\ \ge \\ \le \\ \le \end{matrix} \begin{bmatrix} 600 \\ 1000 \\ 400 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

إن النتائج النهائية الخارجة من الحاسبة الإلكترونية هي كما يلي:

Decision Solution unit cost or Total R
Educed Basis Allowable
Allowable
Variable Value Profit c(j) Contribution C
Ost Status Min. C(j)
Max. C(j) قيمة المتغيرات
1 X_1 100.0000 6.0000 60000000 0 B
Asic 0 M
2 X_2 100.0000 8.0000 1.600.0000 0 B
Asic 0 M
3 X_3 0 10.0000 0 10.0000 At bound 0
4 M
X_4 200.0000 0 0 0 basic 0
M

Objective Function (Min.) = 2.200.000 دالة الهدف

Left Hand Right Hand Slack S
Hadow Allowable
Allowable
Constraint side Direction Side Or Surplu

S Price Min.RHS
Max. RHS
1 C_1 800.0000 >= 600.0000 200.0000
0 -M
800.0000
2 C_2 1.300.0000 >= 1.000.0000 300.0000
0 -M
1.300.0000
3 C_3 400.0000 >= 400.0000 0 0
100.0000 M
4 C_4 100.0000 >= 100.0000 0 6
.0000 0 M
5 C_5 200.0000 >= 200.0000 0 8
.0000 100.0000 M

مما تقدم يتضح أن قيم المتغيرات هي كما يلي:

$$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200 \begin{cases} 100 = x_{11} \\ 100 = x_{12} \\ 0 \quad = x_{13} \\ 200 = x_2 \end{cases}$$

وفي ظل هذه النتائج تكون أقل قيمة لدالة الهدف هي كما يلي:

$$Z= 6 * 100 + 8*100 + 10 * 0 + 4 * 200 \rightarrow 2200$$

أي أن المنشأة تتحمل أقل كلفة شراء كلية ممكنة وهي 2200 وحدة نقدية فيما لو اتخذ قرارا بشراء 200 وحدة من العلف M و 200 وحدة من العلف N.

5.3 بيانات جدول السمبلكس ودورها في ترشيد خطط الإنتاج

في الفقرات السابقة لاحظنا كيفية تطبيق طريقة السمبلكس في حل نموذج البرمجة الخطية وكيفية الحصول على الحلول الثلاث (الممكن، الأفضل، الأمثل) بشكل متدرج، حيث لاحظنا أن المرحلة الأهم كانت الأخيرة التي عندها يتم الحصول على الحل الأمثل وذلك من خلال بيان كمية ونوعية المنتجات التي سوف يتم طرحها ضمن خطة الإنتاج. وهي تلك المنتجات التي سوف تتنافس مع بعضها البعض على ما هو متوفر من موارد ومستلزمات إنتاج محدودة، وتبرز إلى الواقع باعتبارها تحقق أعلى قدر ممكن من الإيرادات وتحقق أفضل استغلال لمستلزمات الإنتاج[1].

إن البيانات التي ترد من خلال مراحل جدول السمبلكس المختلفة، وبالتحديد في المرحلة الأخير منه، هي عبارة عن مؤشرات كمية تساعد متخذ القرار في المنشأة في تحقيق ما يلي:

1- صياغة خطة الإنتاج التي سوف تعتمد في المرحلة القادمة.
2- توفير بيانات وفق مؤشرات كمية تساعد متخذ القرار في ترشيد خطة الإنتاج الحالية من خلال المقارنة والقياس النسبي.

(1) وقد يكون ذلك أيضا بأقل كلفة محلية ممكنة للإنتاج، لمزيد من التفاصيل راجع: هيزا بدرخان السندي "تحليل حساسية النموذج الرياضي دليل المدير في ترشيد خطط الإنتاج، أطروحة ماجستير، جامعة الكوفة، كلية الإدارة والاقتصاد، إشراف د. مؤيد الفضل1997.

ومن أجل توضيح فكرة ما تقدم (سواء ما يتعلق بصياغة خطة الإنتاج أو ترشيد خطط الإنتاج) نأخذ على سبيل المثال حالة تطبيقية تتعلق بأحد المنشآت الإنتاجية التي ترغب في طرح خمسة أنواع من المنتجات ($No._5, No._4, No._3, No._2, No._1$) وذلك من خلال استخدام ثلاثة أنواع من مستلزمات الإنتاج:

1- المواد الأولية الأساسية والقانونية (محسوبة بالكيلوغرام).

2- الطاقة الكهربائية (محسوبة بالكيلو واحد).

3- ساعات العمل (محسوبة بالساعات).

حيث أن المنشأة المذكورة ترغب في معرفة أي من هذه المنتجات إذا تم اعتمادها في خطة الإنتاج سوف تحقق أعلى قدر ممكن من الأرباح وتحقق الاستغلال الأمثل لما هو متاح من مستلزمات الإنتاج المذكورة أعلاه. إن معالجة هكذا نوع من المشاكل يعتمد على ما هو متوفر في بيانات ونموذج رياضي للمشكلة[1]، الذي تم تنفيذ عملية الحل له من خلال جدول السمبلكس الموضح في صيغة الجدول رقم (3-7).

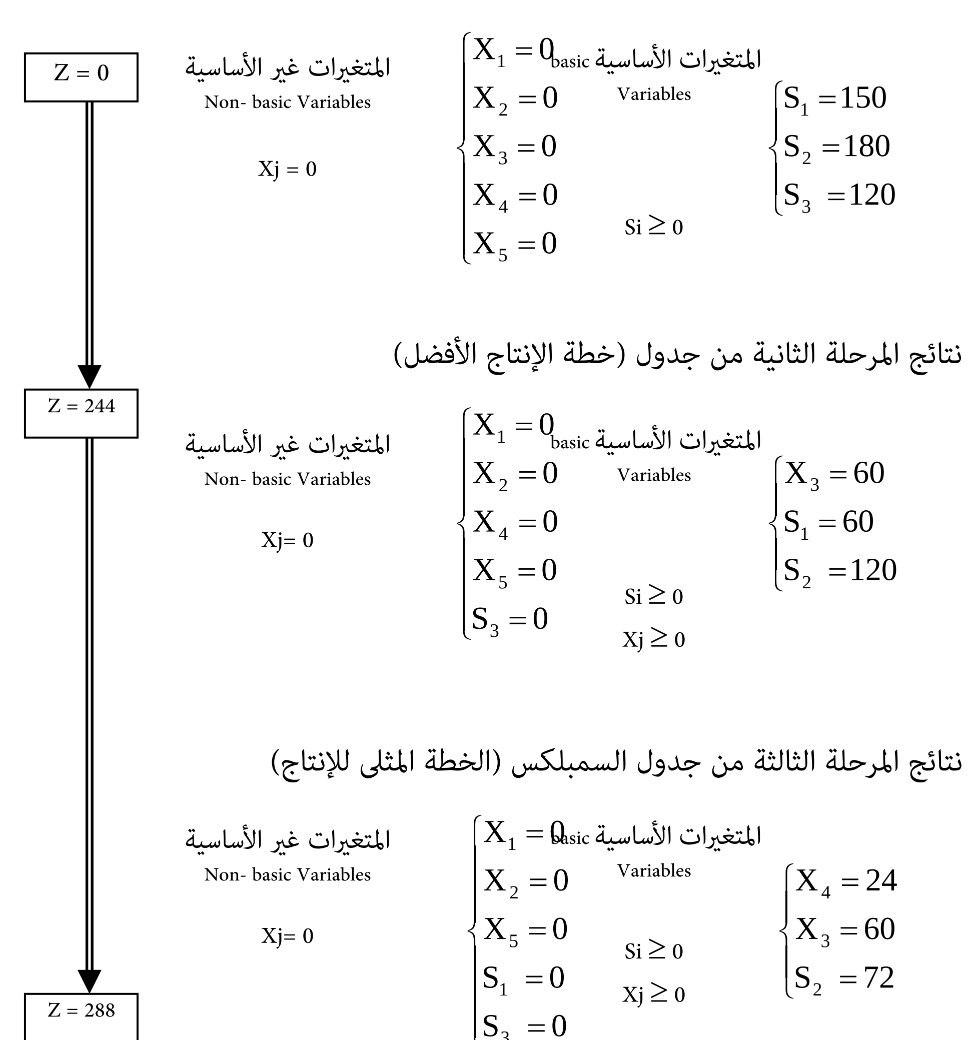
(1) لمزيد من التفاصيل راجع كتابنا مع الدكتور نجاح باقر شير "بحوث العمليات وتطبيقاتها في وظائف المنشأة" وكذلك كتابنا من الدكتور جاسم محسن محمد "إدارة الإنتاج والعمليات" وكلاهما إصدار دار زهران، الأول سنة 1999 والثاني سنة 2004.

المتغيرات		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	S_2	S_3	قيمة المتغير الأساسي bi	معامل المتغير الأساسي في دالة الهدف C_B
معامل المتغير في دالة الهدف Cj		2	1	4	2	1	0	0	0		
المتغيرات الأساسية	S_1	4	1	3/2	5/2	0	1	0	0	150	0
	S_2	2	3	1	2	7	0	1	0	180	0
	S_3	0	2	(2)	0	2	0	0	1	120	0
Zj		0	0	0	0	0	0	0	0	0	قيم دالة الهدف
Cj-Zj		2	1	(4)	2	1	0	0	0		
المتغيرات الأساسية	S_1	4	-1/2	0	(5/2)	-3/2	1	0	-3/4	60	0
	S_2	2	2	0	2	6	0	1	-1/2	120	0
	X_3	0	1	1	0	1	0	0	1/2	60	4
Zj		0	4	4	0	4	0	0	2	240	قيم دالة الهدف
Cj-Zj		2	-3	0	(2)	-3	0	0	-2		
المتغيرات الأساسية	X_4	8/5	-1/5	0	1	-3/5	2/5	0	-3/10	24	2
	S_2	-6/5	12/5	0	0	36/5	-4/5	1	1/10	72	0
	X_3	0	1	1	0	1	0	0	½	60	4
Zj		16/5	18/5	4	2	14/5	4/5	0	7/5	288	قيم دالة الهدف
Cj-Zj		-6/5	-13/5	0	0	-9/5	-4/5	0	-7/5		

جدول (3-7) الطريقة المبسطة الذي يحوي النتائج النهائية (الحل الأمثل) للمشكلة

من الجدول السابق يتضح أن الحل الأمثل قد تم الحصول عليه في المرحلة الثالثة لأن القيم الواردة في الحقل (cj-zj) هي قيم سالبة وأصفار (أي أن $cj- zj \le 0$)، وأن لكل مرحلة من مراحل الجدول السابق هنالك تفسيرات تعبر عن نوع الحل الذي يعبر عن المشكلة والذي هو عبارة عن خطة إنتاج، وفيما يلي تفسير البيانات ونتائج كل مرحلة.

نتائج المرحلة الأولى من جدول السمبلكس (خطة الإنتاج الممكنة)



من النتائج السابقة يتضح أن في المرحلة الأولى كانت خطة الإنتاج الممكنة تعني عدم طرح أي نوع من المنتجات الخمسة والإبقاء على ما هو موجود من مستلزمات الإنتاج الأساسية ($S_1 = 150, S_2= 180, S_3=120$) دون أي استغلال، لذلك كانت الأرباح الكلية صفر.

في المرحلة الثانية من جدول السمبلكس توضع الخطة الأفضل للإنتاج، حيث بموجب هذه الخطة يتم طرح المنتج رقم (3) فقط بمقدار 60 وحدة ($x_3=60$) ولم يتم طرح أي من المنتجات الأخرى ($x_1= x_2 = x_4 = x_5 = 0$) وتم الاستغلال الكامل لساعات العمل المتاحة ($S_3=0$) ويبقى من مستلزمات الإنتاج غير المستغل 60 كغم من المواد الأولية ($S_1=60$) و 120 واط من الطاقة الكهربائية غير مستغل ($S_2=120$). وفي ظل هذا النوع من خطة الإنتاج تكون الأرباح الكلية المتوقعة 240 وحدة نقدية.

إن الخطة المثلى يتم الحصول عليها في المرحلة الأخيرة (الثالثة) من جدول السمبلكس، حيث كان مضمون الخطة، هو طرح المنتج الرابع بمقدار 24 وحدة والمنتج الثالث بمقدار 60 وحدة وعدم طرح المنتجات الأخرى ($x_1 = x_2 = x_5=0$) إن هذه الخطة تحقق الاستغلال الأمثل للمواد الأولية وساعات العمل ($S_1 =0, S=0$)، ويتم الاحتفاظ بـ 72 واط من الطاقة الكهربائية كفائض غير مستغل، أما الأرباح الكلية المتوقعة فهي 288 وحدة نقدية.

بالإضافة إلى ما ورد أعلاه من تحليلات بخصوص خطط الإنتاج الثلاث، فإن بالإمكان ترشيد خطة الإنتاج من خلال الاستعانة بالتحليلات الكمية التالية المستمدة من الجدول رقم (3-7) وذلك كما يلي:

العمود (bi) يمثل الرقم (24) أكبر عدد وحدات يمكن إنتاجها من المنتوج رقم (4)، حيث تحدد ذلك في ضوء المتوفر من المواد الأولية البالغ مقدارها (150) وحدة، ويلاحظ وجود الرقم (1) عند تقاطع الصف الذي يحوي المتغير (x_4) مع عمود (x_4) وهذا يعني أن (x_4) هو متغير أساسي وليس بالإمكان زيادة وحدة واحدة من المنتوج

رقم (4) بسبب استغلال جميع ما توفر من المواد الأولية. أما بالنسـبة للـرقم (60) في الصف الذي يحوي المتغير (x_3) فإنه تمثل أكبر عدد وحدات يمكن إنتاجها من المنتـوج رقـم (3) كما ذكرنا في التحليل السابق، حيث تحدد ذلـك في إطـار المتـوفر مـن سـاعات العمـل البالغة (120) ساعة، ويلاحظ وجود الرقم (1) عند تقاطع الصف الذي يحوي المتغير (x_3) مع العمود (x_3)، وهذا يعني أن (x_3) هو متغيرا أساسيا وأن ليس بالإمكان زيادة وحـدة واحـدة من المنتوج رقم (3) بسبب استغلال جميع ما هو متوفر من الطاقة الكهربائية.

أما بخصوص الرقم (72) في الصف (s_2) فإنه كما ذكرنا في التحليل السـابق يمثـل عـدد وحدات الطاقة الكهربائية المخزونة كاحتياطي غير مستغل، وأن تفسـير هـذا الـرقم قـائم على أساس أن إنتاج (24) وحدة مـن المنتـوج رقـم (4) يحتـاج إلى (48) وحـدة مـن الطاقـة الكهربائية.

أما بخصوص الرقم (72) في الصف (s_2) فإنه كما ذكرنا في التحليـل السـابق يمثـل عـدد وحدات الطاقة الكهربائية المخزونة كاحتياطي غير مستغل، وأن تفسـير هـذا الـرقم قـائم على أساس أن إنتاج (24) وحـدة مـن المنتـوج رقـم (4) يحتـاج إلى (48) وحـدة مـن الطاقـة الكهربائية وذلك لأنه يحسب على أساس أن هناك (24) وحدة مضروبة في (2) الـذي يعـبر عن حاجة كل وحدة واحدة من المنتوج من الطاقة الكهربائية[1] وعليـه فـإن مجمـوع مـا سوف يتم استغلاله من الطاقة الكهربائية هو:

(48+60=108وحدة)، ولما كان مقدار ما متوفر من الطاقة الكهربائية هـو (180) وحـدة فإن عدد وحدات الطاقة الكهربائية غير المستغلة (S_2) هو (72) وحــــدة (180-108=72)[2].

(1) معامل (x_4) في القيد الثاني الذي يخص استغلال الطاقة الكهربائية هو (2).

(2) معامل (x_3) في القيد الثاني الذي يخص استغلال الطاقة الكهربائية هو (1).

2. العمود (x1)

إن الرقم (8/5) يعني أنه لو قررت إدارة الإنتاج إضافة وحدة واحدة من المنتوج رقم (1) إلى ما هو مخطط إنتاجه، فإن ذلك يؤدي إلى تقليل عدد وحدات المنتوج رقم (4) بمقدار (8/5) وحدة، وتفسير ذلك هو أن وحدة المنتوج رقم (1) تحتاج إلى (4) وحدات من المواد الأولية وهذا ما يعادل المواد الأولية اللازمة لإنتاج (8/5) وحدة من المنتوج رقم (4) التي تحتاج إلى (2.5) وحدة من المواد الأولية.

أما الرقم (6/5-) فإنه يعني أن إدارة الإنتاج إذا قررت إضافة وحدة واحدة من المنتوج رقم (1) إلى ما هو مخطط وأدى ذلك إلى نقص في عدد الوحدات المنتجة من المنتوج رقم (4) بمقدار (8/5) وحدة كما ورد سابقا، فإن ذلك يؤدي إلى توفير في الطاقة الكهربائية بمقدار (8/5) وحدة $\frac{8}{5} = \frac{-6}{5}$ 2-2*1 وبذلك يزداد عدد الوحدات الاحتياطية من الطاقة الكهربائية بمقدار (6/5) وحدة[1].

إن الرقم (0) في الصف الذي يحوي المتغير (X_3)، يعني إدارة الإنتاج لو قررت إضافة وحدة واحدة من المنتوج رقم (1) إلى ما هو مخطط، فإن ذلك سوف لا يؤثر على عدد الوحدات المخطط إنتاجها من المنتوج رقم (3)، وإن ذلك يعود إلى أن المنتوج رقم (1) ورقم (4) لا يحتاجان إلى ساعات عمل.

3. العمود (X_2)

إن الرقم (1) في الصف الذي فيه المتغير (X3) يعني أن إدارة الإنتاج إذا ما قررت إضافة وحدة واحدة من المنتوج رقم (2) إلى ما هو مخطط إنتاجه، فإن ذلك يستوجب

---

(1) إن العلامة الرياضية أمام المعاملات تتوقف على العلامة بين المتغيرات وطريقة تغير كل منها، فالعلامة السالبة تعني أن هناك تغير طردي للمتغيرين، أي أنها تمثل زيادة في المتغير الأول نتيجة زيادة في المتغير الأخير وبالعكس، أما العلامة الموجبة فإنها تشير إلى التغير العكسي للمتغيرين، أي زيادة في المتغير الأول نتيجة نقص في المتغير الآخر وبالعكس للمزيد انظر:
الفضل، مؤيد عبد الحسين، الحديثي علي حسين، شبر، نجاح باقر "بحوث العمليات وتطبيقاتها في وظائف المنشأة" دار زهران للطباعة- عمان 1999 ص74.

سحب وحدة واحدة من المنتوج رقم (3)، وسبب ذلك هو أن وحدة واحدة من المنتوج رقم (2) تحتاج إلى نفس عدد ساعات العمل الذي تحتاجها وحدة المنتوج رقم (3) والبالغة (2) وحدة.

أما الرقم (-1/5) فإنه يعني أن إضافة وحدة واحدة من المنتوج رقم (2) والذي يتبعه سحب وحدة واحدة من المنتوج رقم (3) كما ورد سابقا، سيؤدي إلى زيادة عدد الوحدات المنتجة من المنتوج رقم (4) بمقدار (1/5) وحدة وذلك لأن:

$$(1(1) - 1\ (1.5) = 0.5\ ,\ 0.5/\ 2.5 = -1/5)$$

أما الرقم (12/5) فهو يعني أن إدارة الإنتاج عندما تقرر إضافة وحدة واحدة من المنتوج رقم (2) إلى ما هو مخطط، والذي سوف يتبعه سحب وحدة واحدة من المنتوج رقم (3) وزيادة (1/5) وحدة من المنتوج رقم (4)، فإن ذلك سوف يؤدي إلى استغلال (12/5) وحدة من الطاقة الكهربائية الفائضة.

4. العمود (X_3)

إن الرقم (0) في الصف الذي فيه المتغير (X_4) والصف (S_2) يعني أنه لن يكون هناك أي تأثير لعدد وحدات المنتوج رقم (3) على وحدات المنتوج رقم (4) والطاقة الكهربائية الاحتياطية، وذلك لأنه لن تتمكن إدارة المنشأة من زيادة عدد وحدات المنتوج رقم (3) بسبب تحقق حالة الاستغلال الكامل لكل ساعات العمل.

5. العمود (S_3)

إن الرقم (1/2) يعني أن إدارة الإنتاج إذا ما قررت تخفيض ساعات العمل بمقدار ساعة واحدة، فإن هذا القرار سوف يؤدي إلى تقليل وحدات المنتوج رقم (3) المخطط بمقدار (1/2) وحدة، والسبب في ذلك يعود إلى أن وحدة المنتوج رقم (3) تحتاج إلى ساعتي عمل.

أما الرقم (-3/10) فإنه يعني لو خفضت ساعات العمل بمقدار ساعة واحدة وتبع ذلك تقليل وحدات المنتوج رقم (3) بمقدار (1/2) وحدة (كما ورد سابقا)، فإن ذلك سيؤدي على زياد المنتوج رقم (4) بمقدار (3/10) وحدة وتوفير مواد أولية بمقدار (3/4) وحدة تحسب كما يلي: (½ * 1.5). ولو استطاعت إدارة الإنتاج استغلال هذه المواد لإنتاج وحدة إضافية من المنتوج رقم (4)، فإن الزيادة ستكون (3/10) وحدة (2.5) /(3/4).

أما الرقم (1/10) فإنه، يعني لو خفضت ساعات العمل بمقدار ساعة واحدة وتبع ذلك نقص في المنتوج رقم (3) بمقدار (1/2) وحدة واحدة وزيادة المنتوج رقم (3) بمقدار (1/2) وحدة واحدة وزيادة المنتوج رقم (4) بمقدار (3/10) وحدة، فإن ذلك سوف يؤدي إلى تخفيض الاحتياطي من الطاقة الكهربائية بمقدار (1/10) وحدة [(1/2)-(3/10)2]. وهكذا بالنسبة لجميع الأرقام الواردة في مصفوفة المعاملات حيث يتم تفسيرها بنفس الطريقة.

أما بالنسبة للأرقام الأخرى الواردة في الصفين الأخيرين من جدول السمبلكس السابق الذي يعرض تفاصيل خطة الإنتاج وهما الصف Zj والصف (cj-zj) فإنه يمكن تفسيرها على النحو التالي:

القيم الواقعة العمود (X_1):

إذا ما قررت إدارة الإنتاج زيادة كمية المنتوج رقم (1) بمقدار وحدة واحدة، فإن ذلك سوف يساهم في زيادة الأرباح بمقدار (2) دينار وسوف يؤدي ذلك إلى تقليل إنتاج المنتوج رقم (4) بمقدار (8/5 وحدة كما ذكرنا سابقا)، والذي يترتب عليه تخفيض الأرباح بمقدار (16/5) دينار، وأن المحصلة النهائية لذلك هي تخفيض الأرباح الإجمالية بمقدار (6/5) دينار، وأنها حسبت كما يلي: (6/5- = 2-16/5) وهذا يعتبر غير مجدي بالنسبة للمنشأة.

القيم الواقعة في العمود (X_2)

إذا ما قررت إدارة الإنتاج زيادة كمية المنتوج رقم (2) بمقدار وحدة واحدة فإن ذلك سوف يساهم في زيادة الأرباح بمقدار (1) دينار، وأن ذلك سوف يؤدي إلى تقليل إنتاج المنتوج رقم (3) بمقدار وحدة واحدة وزيادة في إنتاج المنتوج رقم (4) بمقدار (1/5) وحدة كما ذكرنا سابقا، وأن المحصلة النهائية لقرار المنشأة هذا هو تخفيض الأرباح الإجمالية بمقدار (13/5) دينار حسبت على النحو التالي (1-18/5=13/5-1) ويعتبر هذا القرار بالنسبة للمنشأة غير مجدي.

ويمثل القيم (0) في العمودين x_4, x_3 عدم وجود أي تأثير لزيادة إنتاج كل من المنتوج رقم (3) والمنتوج رقم (4) بمقدار وحدة واحدة على الربح الإجمالي المتوقع.

أما بالنسبة لقيم (cj-zj) الواقعة في الأعمدة (S_1, S_2, S_3) فهي تسمى بأسعار الظل (shadow Prices) والمقصود بسعر الظل في هذه الحالة هو مقدار الربح الإضافي (الزيادة في الربح) المتحقق من زيادة الكمية المتاحة من الموارد بمقدار وحدة واحدة، وأن لهذا السعر أهمية كبيرة بالنسبة للمنشأة، إذ يضع هذا السعر بيد متخذ القرار مؤشرا كميا مهما عند اتخاذ أي قرار يتعلق بزيادة الكمية المتاحة من مستلزمات الإنتاج الأساسية، إن سعر الظل للمواد الأولية المتاحة هي القيمة المقابلة للمتغير (s1) والبالغة (4/5) دينار وأن سعر الظل للطاقة الكهربائية هو القيمة المقابلة للمتغير (S2) والبالغة (0)، وأن هذه القيمة تعني أن هناك فائضا في الطاقة الكهربائية بمقدار (72) وحدة، لذلك فإن أي زيادة في استغلال هذه الطاقة سوف لا تؤثر على الكميات المنتجة وبالتالي لا تؤثر على الربح الإجمالي، وأخيرا سعل الظل لساعات العمل هو القيمة المقابلة للمتغير (S3) والبالغة (7/5) دينار.

واستنادا إلى ما تقدم فإن متخذ القرار يخرج بنتيجة مهمة، وهي أنه لو كان بمقدور إدارة الإنتاج زيادة إمكانياتها المتاحة في الموارد المحدودة، فإن عليها أولا زيادة ساعات العمل بهدف تحقيق ربح إضافي أكبر من الربح الحالي.

أسئلة وتمارين حول الفصل الثالث

(1) توفر لديك النموذج الرياضي الخطي التالي:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 30$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 10$$

$$2X_2 + X_3 \leq 20$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$F = 2X_1 + X_2 + 3X_3 \rightarrow Max.$$

المطلوب: حل النموذج باستخدام طريقة السمبلكس معتمدا الأسلوب اليدوي وأسلوب المصفوفات.

(2) في المرحلة الأخيرة من جدول السمبلكس، المتغيرات الأساسية التي تظهر هي:

$$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

ما هي قيمة الحل الأمثل وقيم هذه المتغيرات المثلى.

(3) ماذا يعني الصف الصفري في جدول السمبلكس.

(4) ما هي المتغيرات الأساسية في المراحل المختلفة لجدول السمبلكس.

(5) أي من المتجهات التالية هي ليست معبرة عن الحل الأمثل، ولماذا، علما بأن:

$X_1, X_2, X_3 \Rightarrow$ متغيرات أساسية

$X_4, X_5 \Rightarrow$ متغيرات راكدة

$R_1, R_2 \Rightarrow$ متغيرات اصطناعية

المتجهات هي:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ R_1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_5 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

(6) إذا علمت أن X_{ijk} هو المتغير الذي يعبر عن كمية الإنتاج المطلوب من النوع j ومن البديل أو تم تصنيعه على الخط الإنتاجي k.

وكانت البيانات المتوفرة عن المشكلة هي كما في الجدول التالي:

الجدول الذي يعبر عن بيانات المشكلة

المنتجات / الخط الإنتاجي	المنتج No.1		المنتج No.2		المنتج No.3		الطاقة التشغيلية المتاحة
	Var.1	Var.2	Var.1	Var.2	Var.1	Var.2	
الخط الإنتاجي .I	2	4	3	2	1	3	130
الخط الإنتاجي.II	1	3	4	3	2	2	140
الخط الإنتاجي .III	3	1	2	1	3	1	120
الربح المتوقع من كل منتج وبالتحديد من كل بديل ولكل خط	10	20	10	30	15	20	
	15	10	20	10	10	30	
	25	20	10	30	15	10	



أسئلة نظرية حول الفصل الثالث

س1: ما هي أهمية طريقة السمبلكس ومن هو مكتشف هذه الطريقة.

س2: متى يتم اللجوء إلى استخدام طريقة السمبلكس.

س3: ما هو اختلاف هذه الطريقة عن الطريقة البيانية والطريقة الجبرية.

س4: ما هي طرق الحل لجدول السمبلكس، عددها واشرح خطوات الحل اليدوي.

س5: ما هي أهمية الحقل (cj-zj) لأغراض تحديد الحل الأمثل.

س6: ما هو المقصود بالعمود المحوري والصف المحوري والصفر المحوري. اكتب العلاقة الرياضية التي تجمع هذه العناصر الثلاث.

س7: ما هي أهمية المصفوفات لطريقة السمبلكس وتكلم عن أهمية مقلوب المصفوفة في هذه الحالة.

س8: ما هو المقصود بمصفوفة الوحدة Identity Matrix.

س9: حدد مواقع القيم التالية: Cj, C_B , Bi, aij في جدول السمبلكس.

س10: ما هي أهمية التحليلات الكمية التي يتم الحصول عليها من جدول السمبلكس لأغراض تخطيط الإنتاج.

الفصل الرابع

الحالات المختلفة للبرمجة الخطية

الفصل الرابع

الحالات المختلفة للبرمجة الخطية

1.4 البرمجة بأعداد صحيحة Integer Programming

البرمجة بأعداد صحيحة Integer programming هي أحد النماذج الرياضية المشتقة من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية، حيث ينصب اهتمام هذا النوع من النماذج الرياضية على إيجاد قيم المتغيرات ($x_1, x_2,...xn$) بأعداد صحيحة خالية من الكسور. وعليه فإن ذلك يتطلب وضع تحديدات معينة في صيغة النموذج الرياضي يشترط تحقق القيم الخالية من الكسور للمتغيرات الداخلة في صياغة النموذج المذكور. إن الهدف الأساسي لبناء النموذج الرياضي للبرمجة أعداد صحيحة، نابع من الاستجابة لمتطلبات الواقع العملي. حيث من المعروف إن الكثير من الحالات والمشاكل التطبيقية لا يمكن التفاعل معها بقيم كسرية. على سبيل المثال، عندما يتطلب الأمر معالجة مشكلة تشغيل عدد من الباصات لنقل الركاب أو استخدام عدد من العاملين أو إقامة عدد من المشاريع الإنشائية، فإن في هذه الحالة:

Xj ⇐ متغير يعبر عن عدد الباصات من النوع (j) أو عدد العاملين من الاختصاص (j) أو عدد المشاريع في الموقع (j).

بناءا على ما تقدم فإن قيمة المتغير (xj) لا يمكن أن يكون فيه كسور لذلك ينبغي أن يكون عدد صحيح. وهذا أهم اختلاف عن حالة البرمجة الخطية. وفيما يلي توضيح للتشابه والاختلاف بين نموذج البرمجة بأعداد صحيحة ونموذج البرمجة الخطية:

البرمجة بأعداد صحيحة Integer Programming	البرمجة الخطية Linear Programming
$\sum_{j=1}^{n} aij\ xj \leq = , \geq bi\ (i = 1,2,..., m)$	$\sum_{j=1}^{n} aij\ xj \leq = , \geq bi\ (i = 1,2,..., m)$
$Z = \sum_{j=1}^{n} Cj\ Xj \rightarrow Max.or\ Min$	$Z = \sum_{j=1}^{n} Cj\ Xj \rightarrow Max.or\ Min$
$Xj \geq 0$	$Xj \geq 0$
$Xj \geq \Rightarrow An - integer$	

مما تقدم يتضح إن الاختلاف الأساسي يتواجد في قيد اللاسلبية الذي يشترط أن تكون قيم المتغيرات (Xj) أعداد صحيحة خالية من الكسور.

الاختلافات الأخرى يمكن ملاحظتها من خلال اعتماد أحد الأشكال البيانية التي تعبر عن مشكلة معينة، تكون موضحة من خلال النموذج الرياضي التالي:

$$-X_1 + 3X_2 \leq 6$$

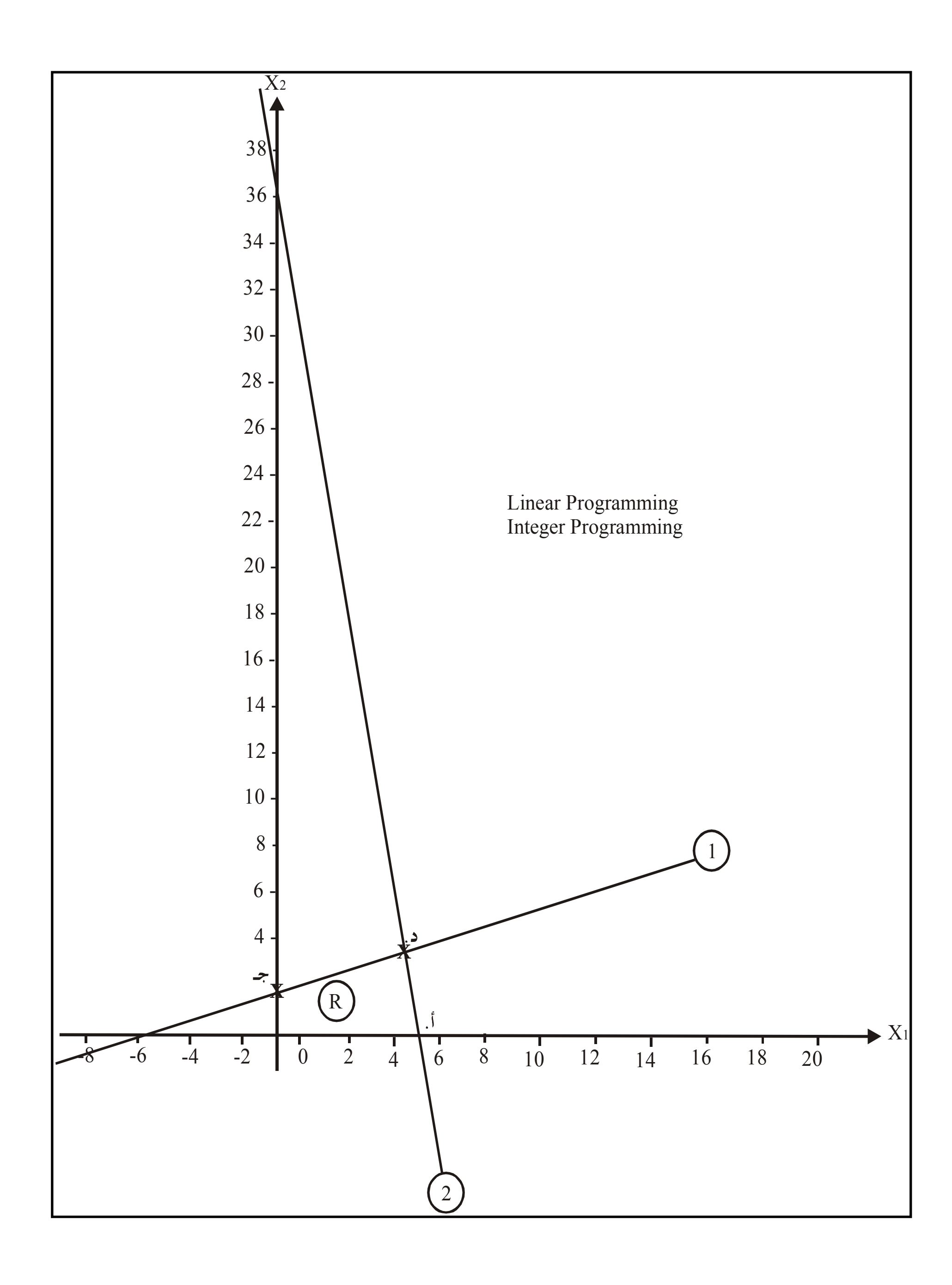
$$7X_1 + X_2 \leq 35$$

$$Z = 7X_1 + 16X_2 \rightarrow Max$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

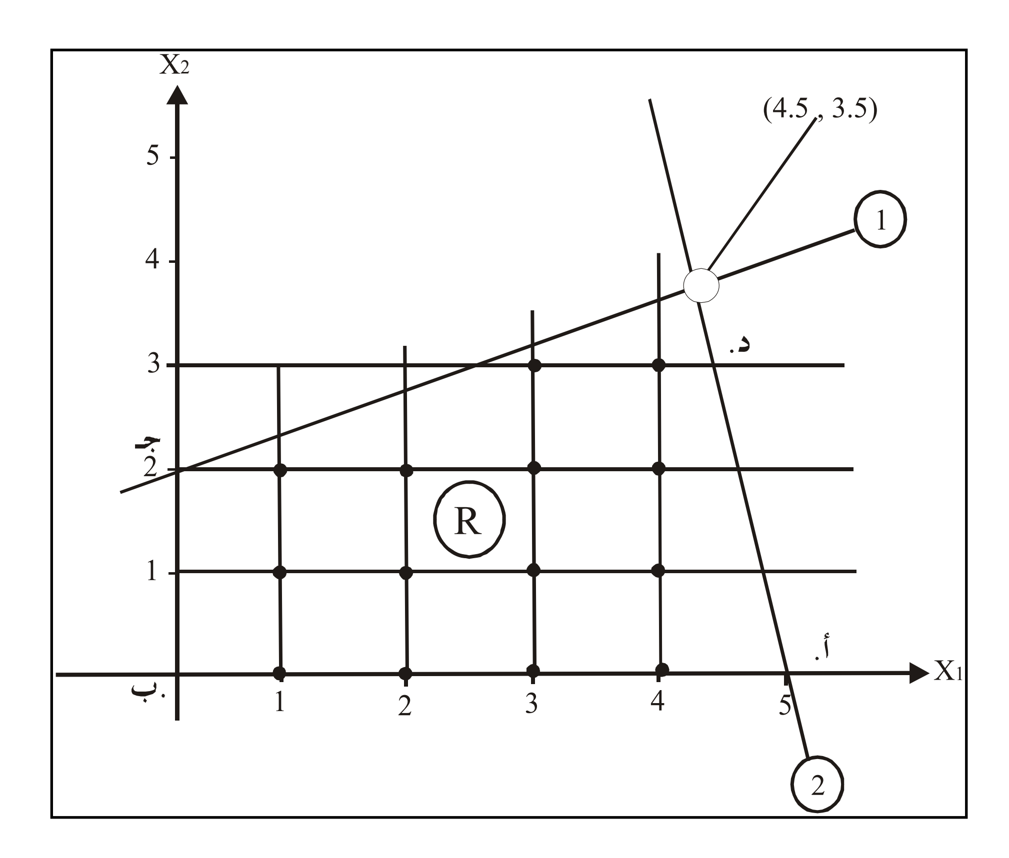
إن التعبير بيانيا عن هذا النموذج الرياضي وفق أسلوب البرمجة الخطية ووفق أسلوب البرمجة بأعداد صحيحة كما في الشكل رقم (4-1). ومن أجل إتمام عملية المقارنة بشكل أوضح، يتم تكبير الجزء الخاص بمنطقة الحلول الممكنة (FR) كما في الشكل رقم (4-2).

الشكل رقم (4-1)


X2
38
36
34
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
جـ
د
أ
R
1
2
Linear Programming
Integer Programming
X1
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

الشكل رقم (4-2)

صورة مكبرة لمنطقة الحلول الممكنة *



إن الشكل رقم (4-2) يعطي تفسيرات ومؤثرات كمية لكل من البرمجة الخطية والبرمجة بأعداد صحيحة. والمقصود في هذه الحالة:

1- ما هي حدود منطقة الحلول الممكنة FR.

2- ما هي إحداثيات الحلول الثلاث (الممكن، الأفضل، الأمثل).

3- قيمة الحل الأمثل (دالة الهدف).

وفيما يلي توضيح لكل واحدة من هذه الحالات:

أولا: البرمجة الخطية Linear Programming

إن منطقة الحلول الممكنة هي تلك المنطقة المحددة بالنقاط أ، ب، جـ، د وأن إحداثيات هذه النقاط مع قيمة (الحل الأمثل (دالة الهدف) هي:

أ-	(5, 0)	$\rightarrow 35$	$Z = 7(5) + 16(0)$
ب-	(0,0)	$\rightarrow 0$	$Z= 7(0) + 16 (0)$
ج-	(0,2)	$\rightarrow 32$	$Z= 7(0) + 16 (2)$
د-	(4.5,3.5)	$\rightarrow \boxed{87.5}$	$Z = 7(4.5) +16(3.5)$

وهو الحل الأمثل

ويتضح من الحسابات أعلاه أن نقطة الحل الأمثل هي عند النقطة (د) مع العلم أن قيم (x_2, x_1) هي أعداد كسرية.

ثانيا: البرمجة بأعداد صحيحة Integer Programming

إن منطقة الحلول الممكنة في هذه الحالة هي نفسها في الحالة الأولى، أي أن حدود هذه المنطقة هي أ، ب، جـ، د، إلا أن الإحداثيات الخاصة بالحلول الثلاثة (الممكن، الأفضل، الأمثل) تختلف هنا عن ما هو وارد أعلاه، إذ أن عدد الحلول الممكنة بتحديد من خلال تقسيمات المحاور الأفقية والعمودية (x_2, x_1) وتقاطعات المستقيمات النازلة إلى هذه التقسيمات. وهنا يكمن الفرق الأساسي لهذه الحالة عن الحالة السابقة، حيث كان في الحالة السابقة أية نقطة تؤخذ لأعلى التعيين داخل منطقة الحلول الممكنة (FR) يمكن أن تعطي حلا ممكنا، بينما هنا الأمر مختلف، حيث ينحصر ذلك فقط في تقسيمات المحاور الأفقية والعمودية ونقاط تقاطع المستقيمات النازلة إلى هذه التقسيمات. ومن الشكل رقم (4-2) نستنتج عدد الحلول الممكنة في ضوء التقسيمات الحالية للمحاور كما يلي:

(1)	$Z= 7(5) + 16(0) \rightarrow (35)$	(5,0)	
(2)	$Z= 7(4) + 16 (0) \rightarrow 28$		(4,0)
(3)	$Z= 7(3) + 16(0) \rightarrow 21$		(3,0)
(4)	$Z= 7(2)+16(0) \rightarrow 14$	(2,0)	
(5)	$Z= 7(1) + 16(0) \rightarrow 7$	(1,0)	
(6)	$Z= 7(0) + 16(0) \rightarrow 0$	(0,0)	
(7)	$Z= 7(0) + 16(1) \rightarrow 1$	(0,1)	
(8)	$Z= 7(1) + 16(1) \rightarrow 23$	(1,1)	
(9)	$Z= 7(2) + 16(1) \rightarrow 30$	(2,1)	
(10)	$Z= 7(3) + 16(1) \rightarrow 37$	(3,1)	
(11)	$Z= 7(4) + 16(1) \rightarrow 44$	(4,1)	
(12)	$Z= 7(0) + 16(2) \rightarrow 32$	(0,2)	
(13)	$Z= 7(1) + 16(2) \rightarrow 39$	(1,2)	
(14)	$Z= 7(2) + 16(2) \rightarrow 46$	(2,2)	
(15)	$Z= 7(3) + 16(2) \rightarrow 53$	(3,2)	
(16)	$Z= 7(4) + 16(2) \rightarrow 60$	(4,2)	
(17)	$Z= 7(3) + 16(3) \rightarrow 69$	(3,3)	
(18)	$Z= 7(4) + 16(3) \rightarrow 76$	(4,3)	

من الحسابات السابقة يتضح أن في البرمجة بأعداد صحيحة يوجد (18) حل ممكن ومن بينها يتم اختيار الحل الأفضل والحل الأمثل، حيث نلاحظ أن نقطة الحل الأمثل هي التي عندها قيمة دالة الهدف تساوي (76) وأن:

$$\begin{cases} X_1 = 4 \\ X_2 = 3 \end{cases}$$ وهي أعداد صحيحة

ويلاحظ أن قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي أقل مما هو وارد في حالة البرمجة الخطية، وذلك يعود إلى أن في الحالة الأخيرة يعتمد معيار مهم للحصول على الحل

الأمثل، وهو كلما تم الابتعاد عن نقطة الأصل (في حالة Max.Z) كلما كان ذلك يزيد ويعظم من قيمة دالة الهدف وصولا لحل ما يعرف بالنقطة المتطرفة Extrim Point التي ربما تكون إحداثياتها ذات قيم كسرية. بينما في حالة البرمجة بأعداد صحيحة تتحدد قيمة دالة الهدف في ضوء تقسيمات المحاور الأفقية والعمودية وبالتالي قد لا تبعد كثيرا عن نقطة الأصل، وبعبارة أخرى يتم التنازل عن القيمة العليا لدالة الهدف مقابل الحصول على قيم متغيرات بأعداد صحيحة[1].

1.1.4 أنواع حالات البرمجة بأعداد صحيحة

بشكل عام، نجد أغلب المهتمين بهذا النوع من المواضيع، يقسمون البرمجة بأعداد صحيحة إلى ثلاثة أنواع وهي:

1- حالة البرمجة بأعداد صحيحة الصرفة Pure Integer Programming
2- الحالة المختلطة Mixed Integer Programming
3- حالة الصفر واحد Zero – One Integer Programming (Zero-1)

وفيما يلي توضيح لكل واحدة من هذه الحالات:

- **البرمجة بأعداد صحيحة الصرفة Pure Integer Programming**

يسمى أيضا بالحالة المطلقة، وذلك لأن كل قيم المتغيرات من النموذج $(X_1, X_2, \ldots Xn)$ ينبغي أن تكون أعداد صحيحة كما هو واضح في النموذج الرياضي التالي:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \leq b1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \leq b2$$
$$Z= X_1X1 + C_2X_2 + C_3X_3 \longrightarrow Max.$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$
$$X_1, X_2, X_3 \Longrightarrow \text{An- Integer}$$

(1) لمزيد من التفاصيل عن هذا الموضوع راجع كتابنا مع الدكتور محمود العبيدي الموسوم "بحوث العمليات وتطبيقاتها في منظمات الأعمال" إصدار مؤسسة الوراق، الأردن، عمان 2004.

▪ **الحالة المختلطة Mixed Integer Programming**

في هذا النوع من أنواع البرمجة بأعداد صحيحة تكون قيمة المتغيرات $(X_1, X_2, ...Xn)$ بعضها أعداد صحيحة والبعض الآخر غير ذلك. أي أن طبيعة المشكلة تفرض في النهاية على أن تكون قيم بعض المتغيرات أعداد صحيحة خالية من الكسور، والبعض الآخر يمكن أن يكون فيه كسور. ويمكن التعبير عن ذلك من خلال النموذج الرياضي التالي:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \leq b1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \leq b2$$

$$Z= C_1X1 + C_2X_2 + C_3X_3 \rightarrow Max.$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$X_1 \Rightarrow \text{An- Integer}$$

من النموذج الرياضي يتضح إن قيمة المتغير (x_1) ينبغي أن تكون أعداد صحيحة خالية من الكسور وذلك لأسباب تعود إلى طبيعة المشكلة، حيث قد يكون المتغير x_1 يعبر عن عدد العاملين أو عدد الباصات أو عدد الوكلاء وما شابه ذلك:

▪ **حالة الصفر واحد Zero- One Integer Programming**

إن هذا النوع يقتصر في كونه أكثر وضوحا بالنسبة للتمييز عن الحالات السابقة وعن البرمجة الخطية أصلا، حيث يبنى النموذج الرياضي لهذا النوع من الحالات على أساس أن قيم المتغيرات لا يمكن أن تكون أكثر من قيمتين فقط، وهي إما الصفر أو واحد. وذلك يعود إلى طبيعة المشكلة أصلا، حيث ترتبط هذه القيم بالمفاهيم التالية:

(X)= one(1) $\Leftarrow$ تعني إن الشيء موجود أو الإقرار بالموافقة أو أن الماكنة تعمل وما شابه ذلك.

$(X)=Zero(0)$ ⇐ تعني إن الشيء غير موجود أو تعني الرفض لشيء ما أو أن العامل غائب وما شابه ذلك.

وعليه فإن الصيغة الرياضية لهذا النوع من النماذج الرياضية، يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$

$$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2$$

$$Z= C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 \rightarrow Max.$$

$$x_1 \begin{cases} 1 & \text{أما} \\ 0 & \text{أو} \end{cases}$$

$$x_2 \begin{cases} 1 & \text{أما} \\ 0 & \text{أو} \end{cases}$$

$$x_3 \begin{cases} 1 & \text{أما} \\ 0 & \text{أو} \end{cases}$$

2.1.4 الحالات الشاذة وكيفية معالجتها

عند معالجة بعض المشاكل في الواقع العملي باستخدام نموذج البرمجة بأعداد صحيحة، قد تظهر قيم بعض المتغيرات $(x_1, x_2, ...xn)$ مخالفة لشروط النموذج ومتطلباته التي من أهمها أن تكون قيم المتغير خالية من الكسور. لذلك لو كان الأمر كذلك فإن وجود قيم كسرية غير مقبول من الناحية العملية ويتطلب المعالجة حيث إن ظهور هذه القيم في النتائج النهائية يعني هنا حالة شاذة تستوجب المعالجة. وقد وردت في معظم الطروحات الفكرية المتعلقة ببحوث العمليات ثلاث طرق أساسية تستخدم في معالجة الحالات الشاذة، هذه الطرق هي:

1- طريقة التقريب.
2- طريقة قطع المستوى Cutting Plan Algorithm
3- طريقة التفريع والتحديد Branch and Bound Method

أدناه توضيح لكل واحدة من هذه الطرق وكيفية استخدامها في معالجة الحالات الشاذة.

- **طريقــة التقريب**

يقصد بهذه الطريقة هو تقريب النتائج النهائية الكسرية لقيم المتغيرات التي يتم الحصول عليها لأقرب عدد صحيح. وفي هذا الصدد لا بد أن نوضح بأن هناك اختلاف بين تطبيق هذه الطريقة في حالة الأعداد الكبيرة وفي حالة الأعداد الصغيرة ويمكن بيان ذلك على النحو التالي:

1. التقريب في حالة الأعداد الكبيرة

عند معالج مشكلة معينة، قد تظهر في نهاية الحل لهذه المشكلة قيم مختلفة بعضها يكون بأعداد كسرية بشكل مخالف لقيود وشروط المشكلة، لتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

عند معالجة مشكلة توزيع أعداد العاملين على فروع أحد المصانع الكبيرة الحجم، ظهر لدينا قيم المتغيرات التالية:

$X_1 \Rightarrow 4563.5$

$X_2 \Rightarrow 3215.2$

$X_3 \Rightarrow 6214.4$

$X_4 \Rightarrow 2577.9$

إن استخدام طريقة التقريب في هذه الحالة، يكون بتقريب الرقم بعد الفارزة إلى أقرب عدد صحيح. أي إذا كان أكبر من الرقم خمسة يجبر مع آخر رقم وإذا كان أقل من الرقم خمسة يهمل، لذلك سوف تكون قيم المتغيرات أعلاه كما يلي:

$X_1 \Rightarrow 4564$

$X_2 \Rightarrow 3215$

$X_3 \Rightarrow 6214$

$X_4 \Rightarrow 2578$

2. التقريب في حالة الأعداد الصغيرة

إن أسلوب التقريب في حالة الإعداد الصغيرة يختلف عن الحالة السابقة، وذلك أن الأعداد الصغيرة لا تحتمل التقريب، وأن تقريب الرقم في هذه الحالة سوف يؤدي إلى تشويه المعلومة وبالتالي التقليل من مصداقية النتائج. ولهذا السبب، يتم هنا اللجوء إلى أسلوب الاحتمالات، أي يتم اعتماد قيم احتمالية لقيم المتغير الكسرية، كما هو واضح في المثال التالي:

عند معالجة مشكلة معينة تتعلق بتشغيل ثلاثة أنواع من العاملين، تم الحصول على النتائج التالية:

$x_1 = 4.5$ عامل ماهر

$X_2 = 3.6$ عامل متوسط المهارة

$X_3 = 2.4$ عامل غير ماهر

المطلوب: استخدام أسلوب التقريب لتحويل هذه القيم الشاذة للمتغيرات إلى قيم بأعداد صحيحة.

الحل:

من أجل معالجة هذه الحالة بما يؤدي إلى القضاء على هذه القيم الشاذة تتم عملية المعالجة كما يلي:

X_1	X_2	X_3
5	3	2
5	3	3
5	4	3
5	4	2
6	3	2
6	4	2
6	3	3
6	3	3

وبشكل عام يمكن الاستعانة بالعلاقة الرياضية التالية لتحديد عدد الحلول التي يمكن الحصول عليها:

P ⇐ عدد الحلول الممكنة.

S ⇐ عدد الأرقام في المتغير.

N ⇐ عدد المتغيرات.

فإن:

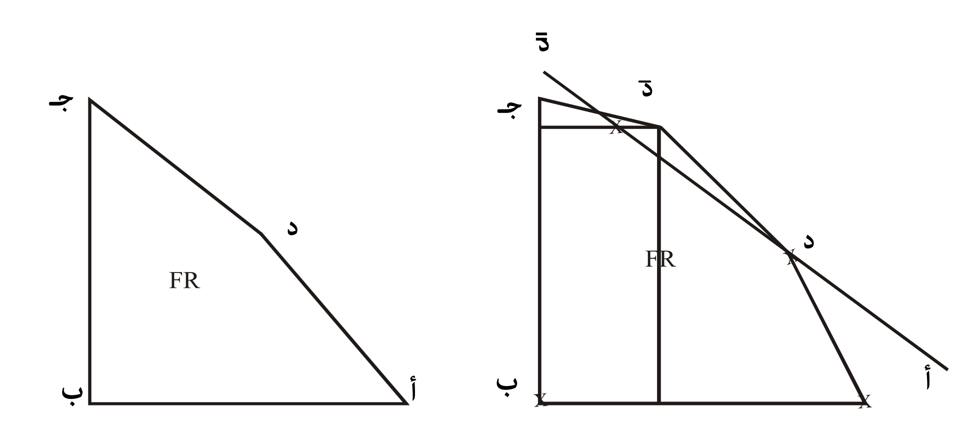
$$P = S^n$$

وبتطبيق هذه العلاقة على المثال أعلاه نحصل ما يلي:

$$P = 2^3 = 8$$

- **طريقة قطع المستوى**

وهي من الطرق الرياضية التطبيقية المهمة في معالجة الحالات الشاذة في البرمجة بأعداد صحيحة، حيث يتم التركيز هنا على الحدود والنقاط المتطرفة لمنطقة الحلول الممكنة (FR). ويتم التعامل مع هذه المنطقة باعتبارها المحور الأساسي لعملية البحث عن الحل الأمثل بحيث تكون قيم متغيراته بأعداد صحيحة. ويتم التعامل مع هذه المنطقة وكأنها قطعة ورق أو قماش تقص وتقطع ومن هنا جاءت التسمية بقطع المستوى. ويتم القطع بإدخال قيد إضافي جديد على المشكلة وبالتحديد عند نقطة الحل الأمثل التي تم الحصول عليها من حل المشكلة وهذا من شأنه أن يعمل على قطعة مساحة المستوى أو منطقة الحلول الممكنة (FR) بالشكل الذي يؤدي إلى إظهار نقطة متطرفة جديدة فيها حل أمثل جديد، فإذا كانت قيم إحداثيات هذه النقطة الجديدة أعداد صحيحة خالية من الكسور تتوقف عند هذه النتيجة، أما إذا كانت ليست كذلك يتم الاستمرار بعملية القطع. والشكل التالي يوضح شكل منطقة الحلول الممكنة باعتبارها كمستوى.



ومن أجل توضيح فكرة قطع المستوي كأسلوب في معالجة القيم الشاذة في البرمجة بأعداد صحيحة نأخذ الحالة التطبيقية التالية:

مثال رقم ❶

لو توفر لديك نفس النموذج الرياضي الوارد في الفقرة السابقة الذي يعبر عن أحد المشاكل الإنتاجية.

(1) $-x_1 + 3x_2 \leq 6$

(3) $7x_1 + x_2 \leq 35$

$Z = 7x_1 + 16x_2 \rightarrow$ Max.

$X_1 , X_2 \geq 0$

$X_1 , X_2 \Rightarrow$ An - Integer

إن الشكل رقم (4-1) يعبر عن المشكلة الموضحة من خلال النموذج الرياضي الوارد أعلاه. ومن الشكل المذكور يتضح أن النقاط الأربعة (أ، ب، جـ د) تعبر عن الحل الأفضل. وبعد التعويض في معادلة دالة الهدف، يتضح إن النقطة (د) هي نقطة الحل الأمثل كما هو واضح أدناه:

		$Z = 7x_1 + 16x_2$	$\rightarrow$	Max.
أ.	(5.0)	$Z = 7(5) + 16(0)$	$\rightarrow$	35
ب.	(0.2)	$Z = 7(0) + 16(0)$	$\rightarrow$	0

ج.	(0.2)	20	$Z = 7(0) + 16(2) \rightarrow$
د.	(4.5, 3.5)	87.5	$Z = 7(4.5) + 16(3.5) \rightarrow$

يتضح من القيم السابقة إن النقطة (د) التي هي نقطة الحل الأمثل تضمنت إحداثيات بأرقام كسرية، وهذا لا يتفق مع أصل الشروط الواردة في النموذج الرياضية للمشكلة، لذلك لا بد من إجراء عملية القطع للمستوى FR الذي يمثل منطقة الحلول الممكنة. ولو فرضنا أن هنالك إمكانية لإجراء قطوعات إضافية على منطقة الحلول المذكورة وذلك باعتبارها قيود إضافية جديدة، وهذه القطوعات هي:

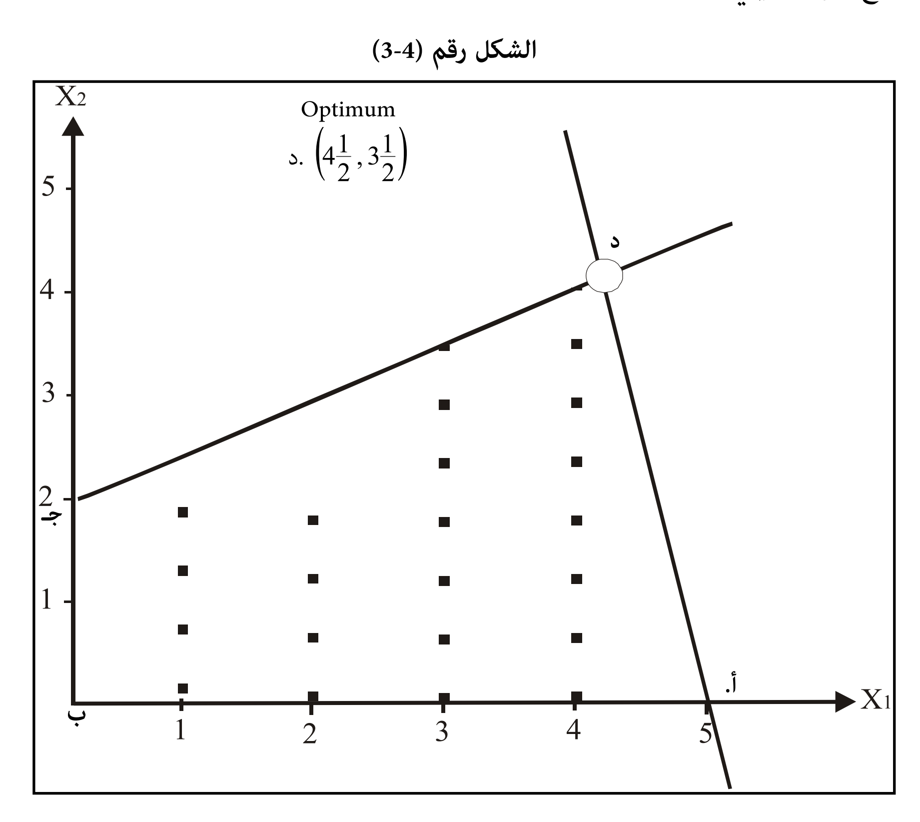
(1) $3x_2 \leq 9$

(2) $7x_1 + 7x_2 \leq 49$

(3) $3x_1 + x_2 \leq 15$

إن الشكل الأول الذي يعبر عن حالة النموذج الرياضي بدون وجود أي قيد من قيود القطع هو كما يلي:

الشكل رقم (4-3)



وبعد إدخال قيمة القطع الأول (.CUT 1):

إحداثيات المستقيم هي: (0,3) ، (∞,∞)

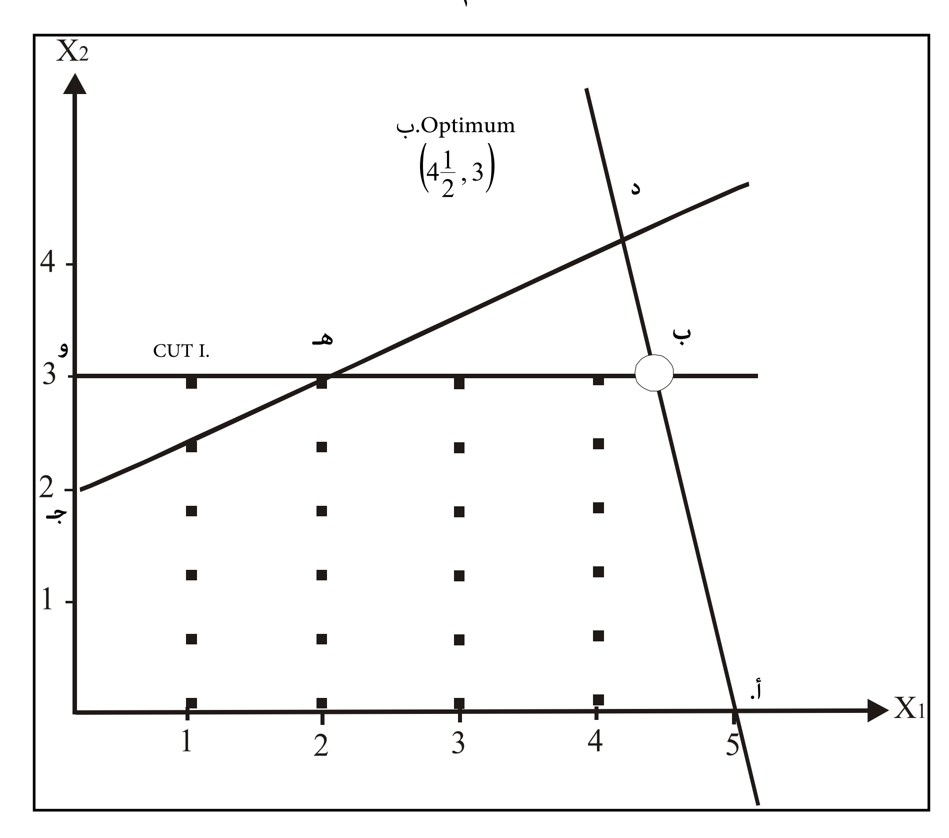
$3X_2 \leq 9$

$3X_2 = 9$

$X_2 = \frac{9}{3} = 9$

وعندها نحصل على الشكل رقم (4-4):

الشكل رقم (4-4)



يتضح من الشكل السابق أن نقطة الحل الأمثل هي $\left(4\frac{1}{2},3\right)$ ولا يزال فيها قيمة X_2 كسرية، لذلك ينبغي اللجوء إلى إدخال قيمة القطع الثاني وذلك كما يلي:

$7X_2 + 7X_2 \leq 49$

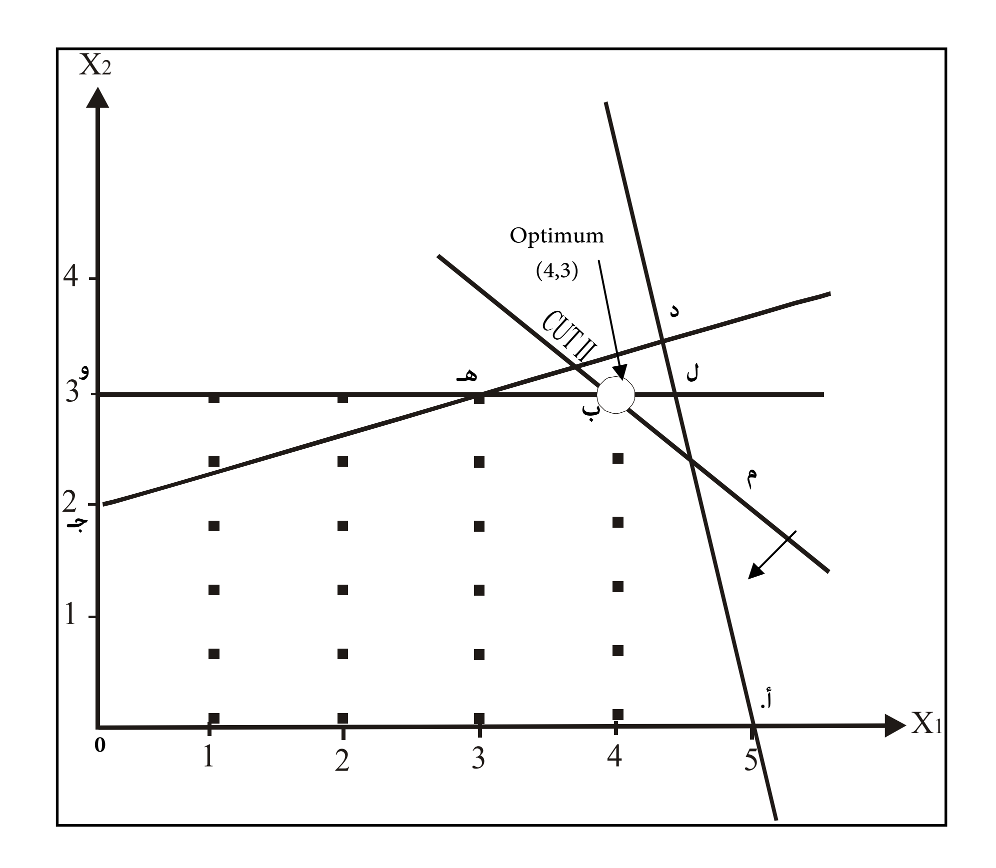
$7X_1 + 7X_2 = 49$

$$(0,7)\begin{cases} 7X_2 = 49 \\ X_2 = 7 \end{cases}$$

$$(7,0)\begin{cases} X_2 = 0 \\ 7X_1 = 49 \\ X_1 = 7 \end{cases}$$

وعندها نحصل على الشكل (4-5) وكما يلي:

الشكل رقم (4-5)



من الشكل السابق يتضح أن نقطة الحل الأمثل أصبحت أعداد صحيحة وهـي: (4,3) لذلك ليس هناك داعي لاعتماد قيمة القطع الثالثة.

- **طريقة التفريع والتحديد branch and Bound Method**

إن فكرة هـذه الطريقـة تقـوم عـلى أسـاس تجزئـة أو تقسـيم المشـكلة الأصـلية إلى مشكلتين فرعيتين مع إضافة قيـود جديـدة مشـتقة مـن أصـل النمـوذج الريـاضي، وعنـد ملاحظة عدم ظهور قـيم نقطـة الحـل الأمثـل بأعـداد صـحيحة يـتم الاسـتمرار بالتجزئـة والتفريع كما هو حتى يصبح لدينا أربعة نماذج رياضية وبنفس الطريقة يتم التحقق مـن قيم دالة الهدف وإحداثيات النقاط التي تعبر عن الحل الأمثـل بوجـود القيـود الجديـدة وهكذا تستمر خطوات الحل لغاية الحصول على نقط الحـل الأمثـل خاليـة مـن الكسـور، ومن هنا جاءت فكرة التفريع بمعنى تجزئة وتقسيم المشكلة الأصـلية أمـا التحديـد فهـي يعني إضافة محددات جديدة مع غلق تفرعات لا تفي بالمطالب أو بالشروط الـواردة في أصل النموذج الرياضي. لتوضيح فكرة هذه الطريقة، فـيما يـلي نمـوذج ريـاضي يعـبر عـن مشكلة مستمدة من واقع الحال:

$$Z = 60x_1 + 50x_2 \longrightarrow \text{Max.}$$

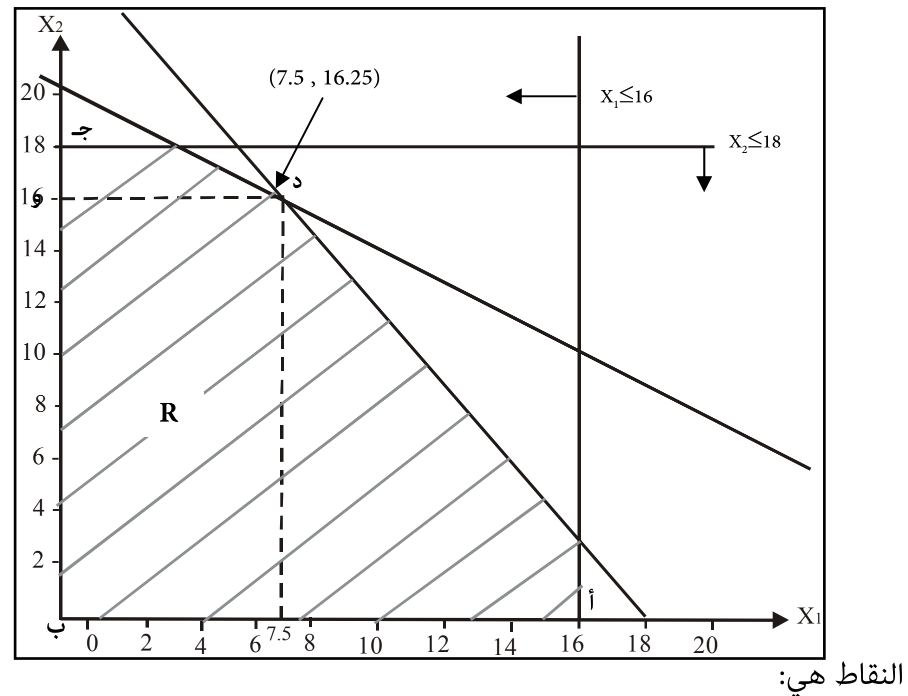
$$2x_1 + 4x_2 \leq 80$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 55$$

$$x_1 \leq 16 \quad x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

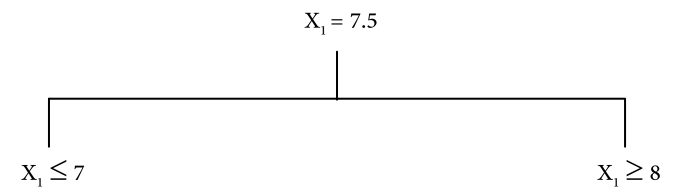
$$x_1 , x_2 \longrightarrow \text{An- Integer.}$$



النقاط هي:

أ ←	(16-0)	$Z= 60(16) + 0 = 960$
ب ←	(0-0)	$Z= 0$
جـ ←	(0-18)	$Z= 0+50\ (18)=900$
د ←	(7.5 , 16.25)	$Z= 60(7.5)+50(16.25)= \boxed{1262.5}$

من خلال التعويض بدالة الهدف نجد أن نقطة الحل الأمثل هـي [د]. ولكـن الحـل عند هذه النقط نجد أنها أعداد كسرية لذلك يتم تفريع هذه المشكلة كما هو واضح:



وبناءا عليه يصبح لدينا ما يلي:

Branch A. (Z_1)

Max.Z = 60x1 + $50x_2$

$2x_1 + 4x_2 \leq 80$

Branch B. (Z_2)

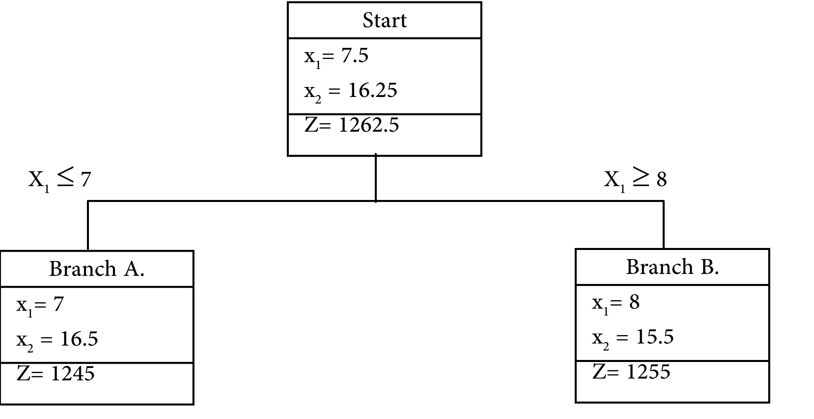
Max.Z = $60x_1 + 50x_2$

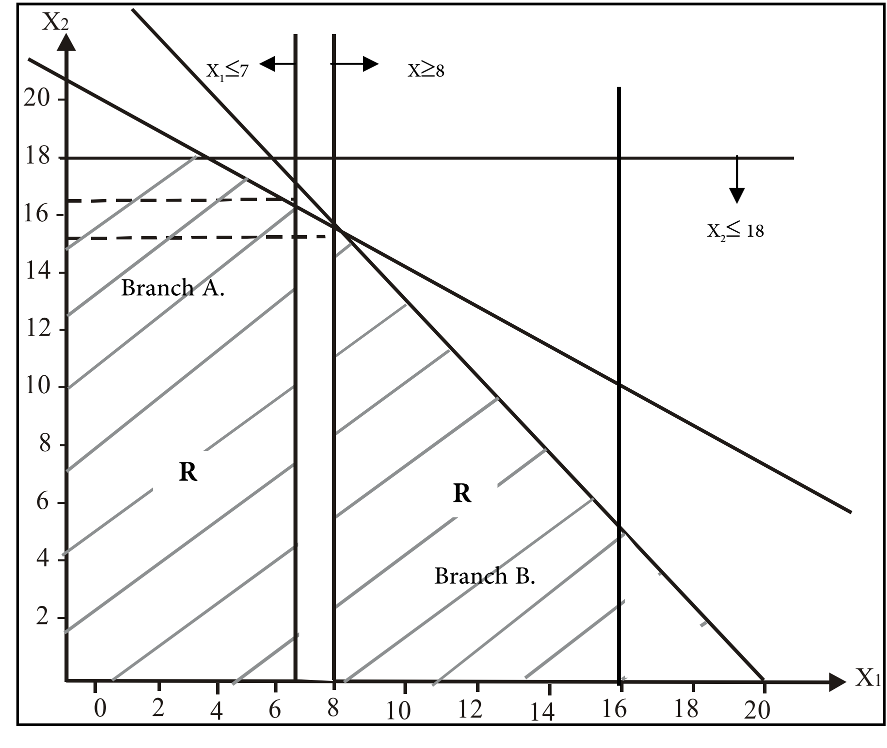
$2x_1 + 4x_2 \leq 80$

$3x_1 + 2x_2 \leq 55$
القيد الجديد $x_1 \geq 8$
$x_1 \leq 16$
$x_2 \leq 18$
$x_1, x_2 \geq 0$
$x_1, x_2 \Rightarrow$ An- Integer

$3x_1 + 2x_2 \leq 55$
القيد الجديد $x_1 \leq 7$
$x_2 \leq 18$
$x_1, x_2 \geq 0$
$x_1, x_2 \Rightarrow$ An- Integer

وبعد حل هذه النماذج نحصل على ما يلي:





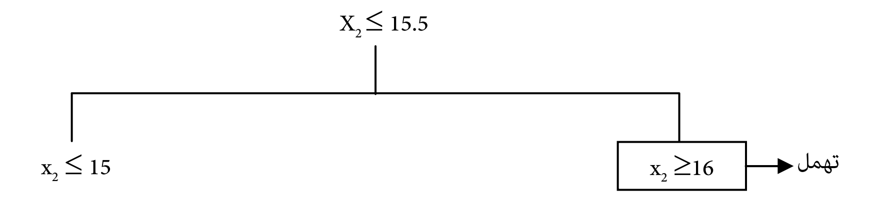
النقاط عند: $x_1 \leq 7$

أ ←	(7-0)	Z= 60(7) + 0 = 420
ب ←	(0-0)	Z= 0
جـ ←	(0-18)	Z= 0+50 (18)=900
د ←	(7, 16.5)	Z= 60(7)+50(16.25) = 1245

النقاط عند: $x_1 \geq 8$

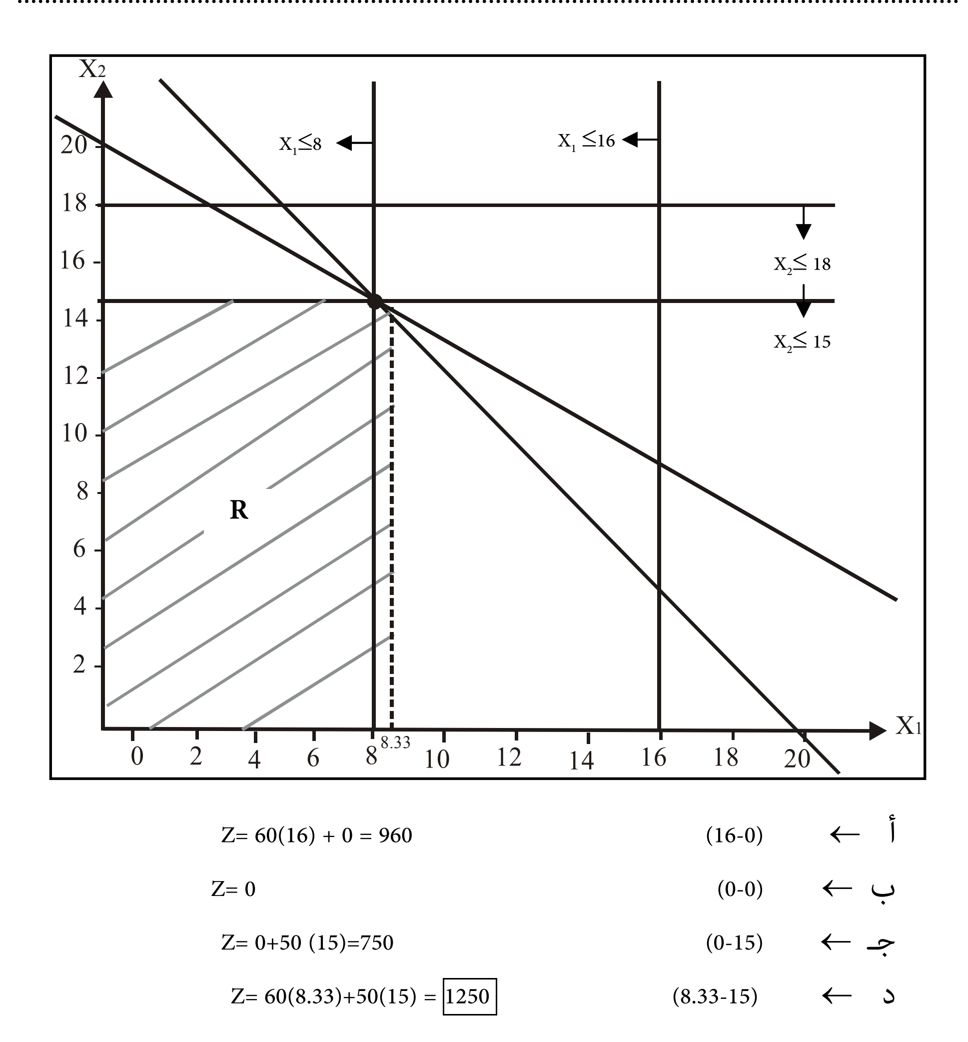
أ ←	(8-0)	Z= 60(8) + 0 = 480
ب ←	(0-0)	Z= 0
جـ ←	(0-18)	Z= 0+50 (18)=900
د ←	(8, 15.5)	Z= 60(7)+50(16.25) = 1255

إن نقطة الحل الأمثل [د] هي أيضا أعداد كسرية. لذلك يجب أن يتم تفريعها مرة أخرى لتنتج أعداد صحيحة.



إن قيمة $x_2 \geq 16$ يتم إهمالها لأنها تدفع بمنطقة الحلول الممكنة إلى خارج الحدود المطلوبة.

لذلك يتم تفريع المشكلة $x_2 \leq 15$ ورسمها لمعرفة نقطة الحل الأمثل هل هي عدد كسري أو صحيح، حيث عندها نحصل على القيم التالية للنقاط أ، ب،جـ د، وذلك كما يلي:



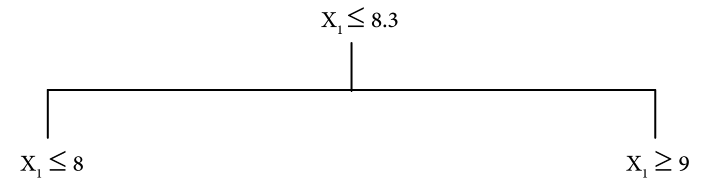
أ ← (16-0)　　$Z= 60(16) + 0 = 960$

ب ← (0-0)　　$Z= 0$

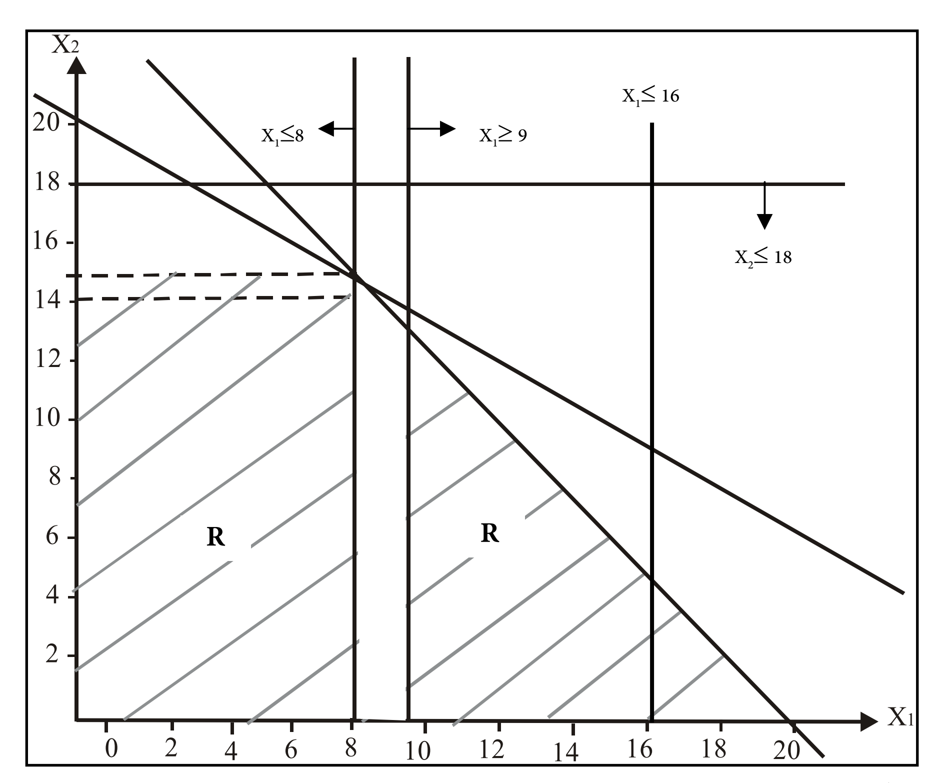
جـ ← (0-15)　　$Z= 0+50\ (15)=750$

د ← (8.33-15)　　$Z= 60(8.33)+50(15) = \boxed{1250}$

نلاحظ من خلال الحل أن نقطة الحل الأمثل [د] هي أيضاً أعداد كسرية لذلك يجب أن يتم تفريعها مرة أخرى. وإذا نتج عن التفريع أعداد كسرية فيتم تفريعها مرة أخرى وإذا نتج أعداد صحيحة فلا تفرّع.



نتائج الحل للنماذج الرياضية المرتبطة بهذه القيم لـ x_1، هي كما يلي:



النقاط عند: $X_1 \leq 8$

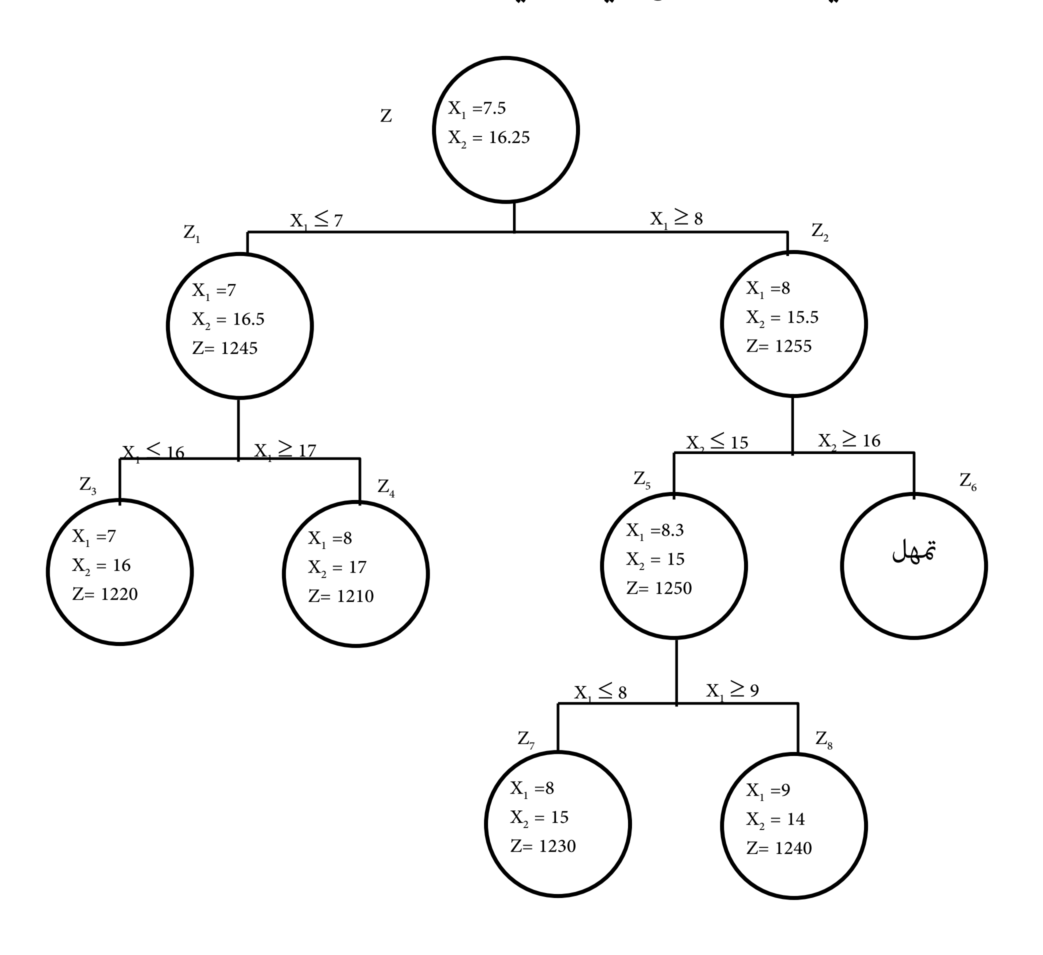
أ ←	(8-0)	Z= 60(8) + 0 = 480
ب ←	(0-0)	Z= 0
جـ ←	(0-18)	Z= 0+50 (18)=900
د ←	(8-15)	Z= 60(8)+50(15) = 1230

النقاط عند: $X_1 \geq 9$

أ ←	(9-0)	Z= 60(9) + 0 = 580
ب ←	(0-0)	Z= 0
جـ ←	(0-18)	Z= 0+50 (18)=900
د ←	(9-14)	Z= 60(9)+50(14) = 1240

إن المشكلة ونقطة الحل الأمثل هي أعداد صحيحة لذلك لا يتم تفريعها.

المخطط الشبكي وعملية التفريع هي كما يلي:

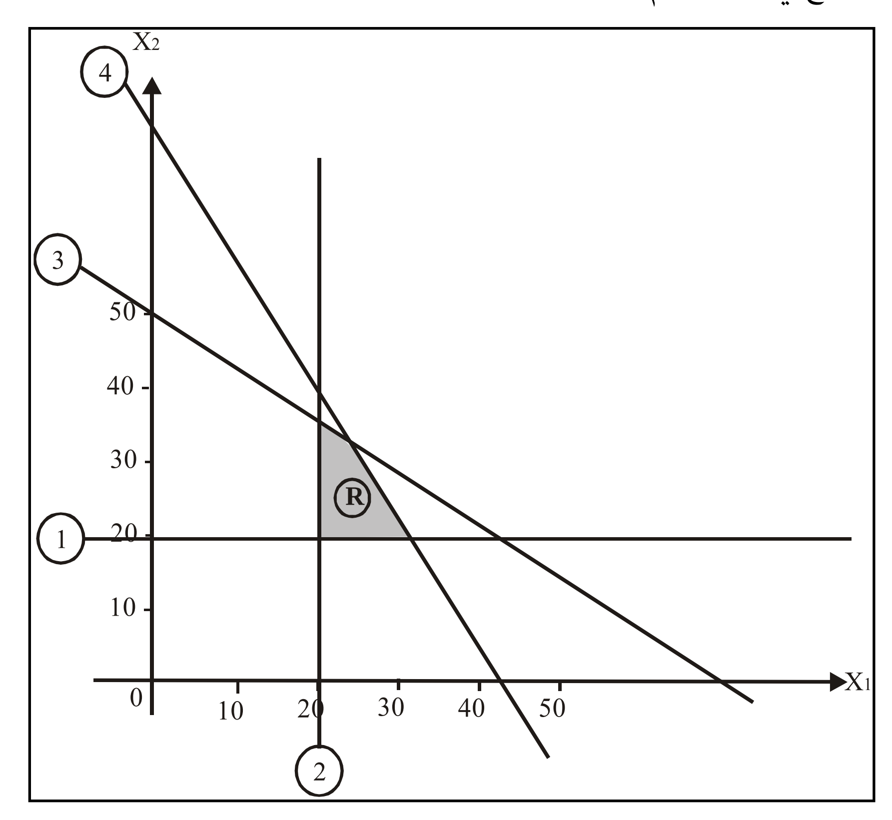


2.4 الحالات الخاصة في البرمجة الخطية

قبل أن نقوم بتحديد ماهية هذه الحالات وطبيعتها، لا بد لنا في البداية من توضيح فكـرة تحديـد منطقـة الحلـول الممكنـة (Feasiable Region) في الحـالات المختلفـة للبرمجـة الخطية.

عند تحديد موقع منطقة الحلول الممكنة (FR) يؤخذ بنظر الاعتبار ما يلي:

1- في حالـة تعظـيم دالـة الهـدف تكـون منطقـة الحلـول محصـورة بـين المسـتقيمات المتقاطعة ونقطة الأصـل. وقـد يظهـر اسـتثناء لهـذه الحالـة بحيـث ترتفـع منطقـة الحلول الممكنة عن نقطـة الأصـل مـن خـلال مسـتقيمات تعـبر عـن شروط تتعلـق بالكمية، حيث قد لا تبدأ الكمية من الصفر وإنما من مقدار أكبر من ذلك كـما هـو واضح في الشكل رقم (4-6).

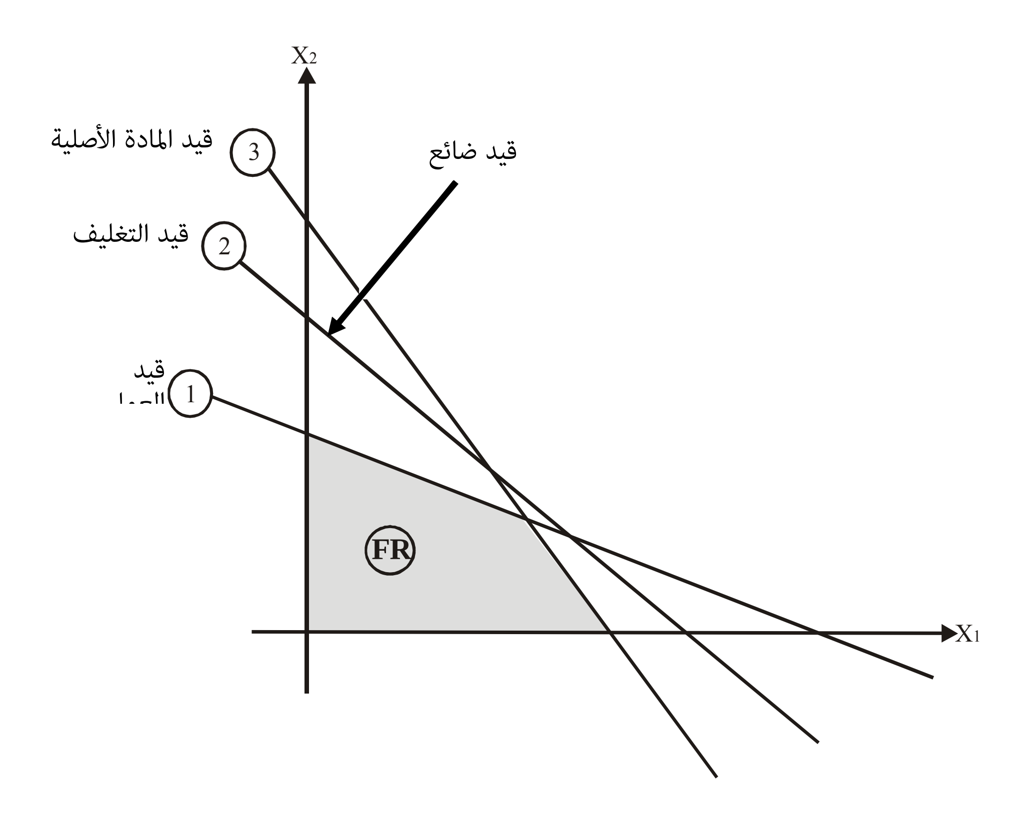


2- إذا كانت الحالة هي تصغير دالة الهدف، فإن منطقة الحلول الممكنـة سـوف تكـون محصورة بين نقطة تقـاطع المسـتقيمات والزاويـة المنـاظرة لنقطـة الأصـل في الربـع الأول من المحاور الأفقية والعمودية (السينية والصادية).

3- سواء كان الأمر يتعلق بتعظيم أو بتصغير دالة الهدف، وكان هنـاك أكـثر مـن اثنـين من المستقيمات المتقاطعة بعضها مع البعض الآخر، فإن في هذه الحالة يؤخذ بنظـر

الاعتبار (لأجل تحديد منطقة الحلول الممكنة) المستقيمات التي تعبر عن القيود الأساسية للمشكلة (مثل قيود المواد الأولية، قيود العمل، ...الخ) كأساس لتحديد منطقة الحلول الممكنة، في حين يعتبر القيد الآخر كقيد ضائع أو قيد محدد ثانوي، كما هو واضح في الشكل رقم (4-7).

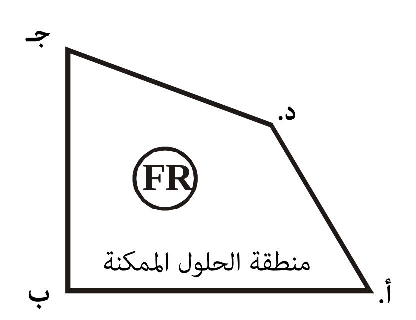
شكل رقم (4-7) تحدد منطقة الحلول من خلال القيود الأساسية



4- بعد أن تحدث عملية تقاطع المستقيمات والمساحات المعبرة عن قيود المشكلة، يبرز إلى الواقع نوعين من الأشكال:

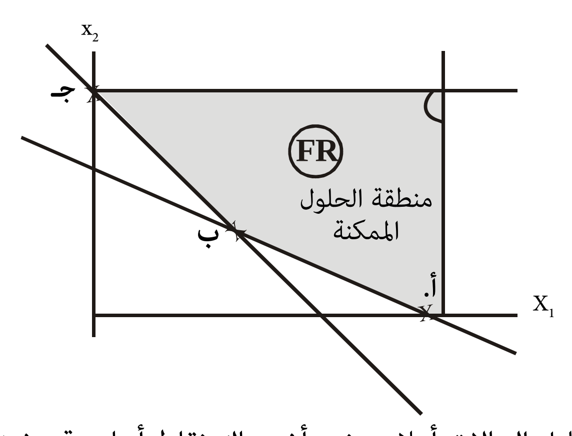
1. الشكل الذي يعبر عن حالة تعظيم دالة الهدف، الذي يحقق القيود التي ساهمت في إبراز الشكل المذكور كما هو واضع في الشكل رقم(4-8).

شكل رقم (4-8) شكل افتراضي يعبر عن منطقة الحلول الممكنة (Max.z)



2. الشكل الذي يعبر عن حالة صغير دالة الهدف، وفيها تتحقق كافة القيـود التـي ساهمت في إبراز الشكل المذكور كما هو واضح في الشكل الافتراضي رقم (4-9).

شكل رقم (4-9) شكل افتراضي لمنطقة الحلول الممكنة (Min.z)



من خلال تحليل الحالات أعلاه يتضح أن هناك نقاط أساسية مشتركة بين الاثنين، وهي:

أ- وجود نقاط كثيرة تعبر عن الحل الممكن[1].

ب- وجود نقاط تمثل زوايا الشكل (FR) تعبر عن الحل الأفضل.

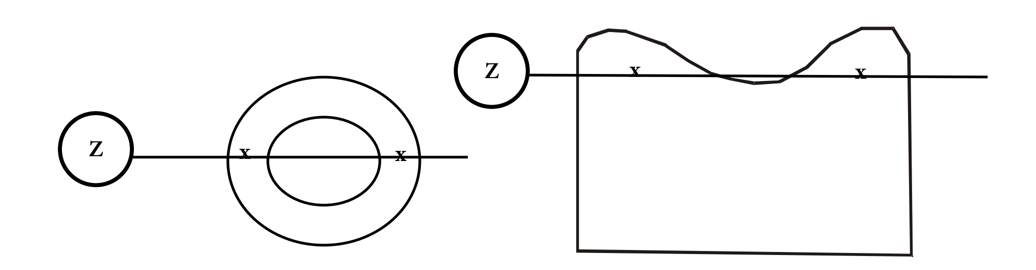
ج- وجود نقطة واحدة تعبر عن الحل الأمثل، حيث تتصف هذه النقطة بما يلي:

- تكون أبعد ما يكون عن نقطة الأصل في حالة Max.Z.
- تكون أقرب ما يكون إلى نقطة الأصل في حالة Min.Z.

د- إن نقطة الحل الأمثل تتكون من الإحداثيات (x_1, x_2) والتي يجب أن تكون قيم موجبة أكبر من الصفر.

هـ- شكل منطقة الحلول (FR) المشار إليه يكون شكلها الأقرب إلى متوازي الأضلاع أو الرباعي المنحرف وما شابه ذلك، ولا تعتبر الأشكال التالية أدناه من الأشكال المقبولة لأن نقاط المستقيم الممتدة بين النقطة (أ) والنقطة (ب) غير منطبقة تماما على المنطقة (FR) وأن بعضها أو معظمها واقع في فراغ.[2]

الأشكال غير المقبولة كمناطق للحلول الممكنة.



إن أي حالة أو مشكلة في الواقع العملي تظهر فيها منطقة الحلول (FR) بشكل غير ما ورد في الحالات (أ، ب، جـ د) الواردة أعلاه، فهي تعد من الحالات الشاذة

(1) في حالة البرمجة بأعداد صحيحة يكون عدد هذه الحلول قليل جداً بالقياس إلى البرمجة الخطية، وذلك لكون هذه الحلول تتحدد من خلال تقاطع المستقيمات النازلة من تقسيمات المحاول الأفقية والعمودية.

(2) لمزيد من التفاصيل راجع: العزاوي، علي عبد السلام "بحوث العمليات في الإنتاج والتخزين والنقل" القاهرة، 1985.

أو الخاصة وبشكل عام يمكن تبويب وتصنيف الحالات الخاصة للبرمجة الخطية في أربعة حالات أساسية وهي:

1. حالة التفكك (الانحلال) Degeneracy.
2. الحلول غير محدودة Unbounded Solutions.
3. تعدد الحلول المثلى Alternative Optimal Solutions.
4. عدم وجود حلول ممكنة Non existing feasible Solutions.

أولا: حالة التفكك (الانحلال)

يسمى حل مشكلة البرمجة الخطية منحلا أو مفككا عندما يكون واحدا أو أكثر من المتغيرات الأساسية قيمته تساوي صفرا. إن وجود حالة الانحلال يجعل من المتعذر أحيانا الوصول إلى الحل الأمثل، وفي أحيان أخرى (وهي الأكثر وقوعا) يكون الوصول إلى الحل الأمثل ممكنا، كما وأن ظهور الحل المنحل في أحد مراحل طريقة السمبلكس قد يستمر إلى المرحلة الأخيرة من الحل، وقد يختفي قبل الوصول إلى الحل الأمثل، أي أن الانحلال يكون مرحليا، وفي حال استمرار مشكلة الانحلال سوف لن تتحسس قيمة دالة الهدف، ويفضل عدم التوقف عن الحل حال ظهور مشكلة الانحلال وقبل الوصول إلى الحل الأمثل وذلك على أمل اختفاء حالة الانحلال قبل الوصول إلى الحل الأمثل وبالتالي تحسين قيمة دالة الهدف، ويمكن توضيح حالة الانحلال من خلال الأمثلة الآتية:

مثال رقم ❶

1- دالة الهدف $Max.\ z = 5X_1 + 9X_2$

2- القيود الأساسية

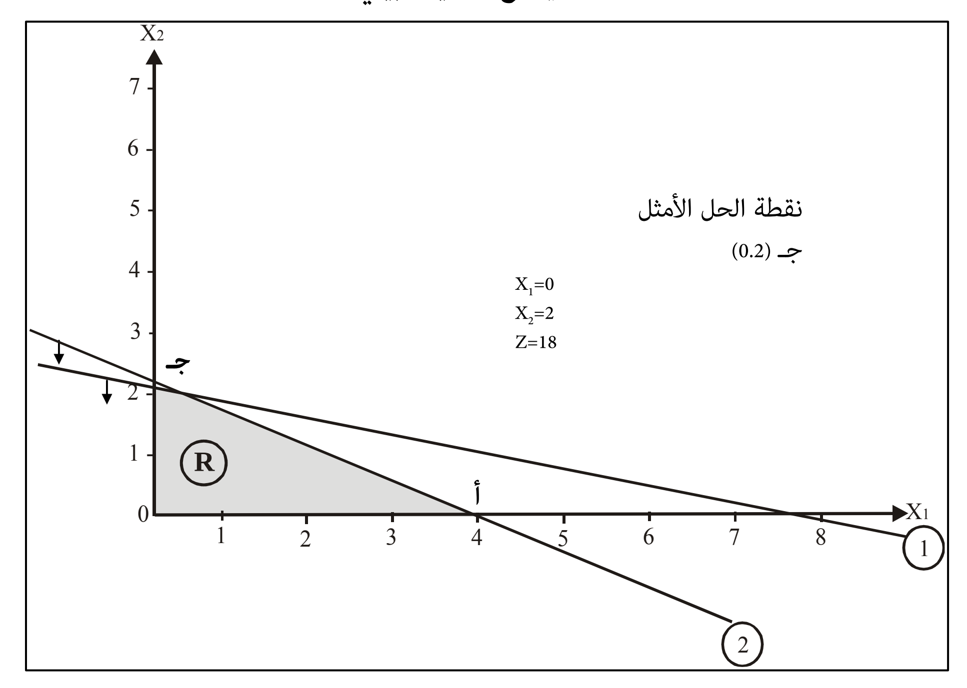
$X_1 + 2X_2 \leq 4$ ....(1)

$X_1 + X_2 \leq 2$ ....(4)

3- قيد اللاسلبية $X_1, X_2 \leq 0$

الحل:

الشكل (4-10) يوضح التمثيل البياني للمشكلة



من الشكل البياني السابق يتضح أن نقاط زوايا منطقة (FR) هي كما يلي:

أ- (2,0)

ب- (0,0)

ج- (0,2)

وعند تعويض هذه النقاط في معادلة دالة الهدف نحصل على ما يلي:

$Z= 5X_1 + 9X_2 \Rightarrow Max.$ معادلة دالة الهدف

$Z = 5(2) + 9(0) \Rightarrow 10$ قيمة الدالة عند النقطة (أ)

$Z= 5(0) + 9(0) \Rightarrow 0$ قيمة الدالة عند النقطة (ب)

$Z = 5(0) = 9(2) \Rightarrow 18$ قيمة الدالة عند النقطة (جـ)

ويتضح أن الحل الأمثل يساوي (18) ويقع عند النقطة جـ ويمكن إعـادة هـذا الحـل باستخدام طريقة السمبلكس وكما هو واضح من جدول السمبلكس التالي:

جدول (4-1) الطريقة المبسطة للمثال رقم (1)

المتغيرات		X_1	X_2	S_1	S_2	قيمة المتغير الأساسي Bi	معامل المتغيرات الأساسية في دالة الهدف CB
معامل المتغيرات في دالة الهدفCj		5	9	0	0		
المتغيرات الأساسية	S_1	1	(2)	1	0	4	0
	S_2	1	1	0	1	2	0
Zj		0	0	0	0	0	قيمة دالة الهدف
(Cj-Zj)		5	(9)	0	0		
المتغيرات الأساسية	X_1	½	1	1/2	0	2	9
	S_2	(1/2)	0	-1/2	1	0	0
Zj		9/2	9	9/2	0	18	قيمة دالة الهدف
(Cj-Zj)		1/2	0	-9/2	0		
المتغيرات الأساسية	X_2	0	1	1	-1	2	
	X_1	1	0	-1	2	0	
Zj		5	9	4	1	18	قيمة دالة الهدف
(Cj-Zj)		0	0	-4	-1		

يلاحظ أن حالة الانحلال في الحل قد ظهرت في المرحلة الثانية من الطريقة المبسطة، واستمرت في المرحلة الثالثة رغم الحصول على الحل الأمثل، ولذلك لم تتحسن قيمـة دالـة الهدف وبقيت كما هي (18) في كلا المرحلتين.

مثال رقم ❷

حل منحل مرحليا

1- دالة الهدف

$Max.\ Z = 2X_1 + X_2$

2- القيود الأساسية

$5X_1 + X_2 \leq 10$ ……………………..……..(1)

$7X_1 + 2X_2 \leq 14$ ………….……..…..(2)

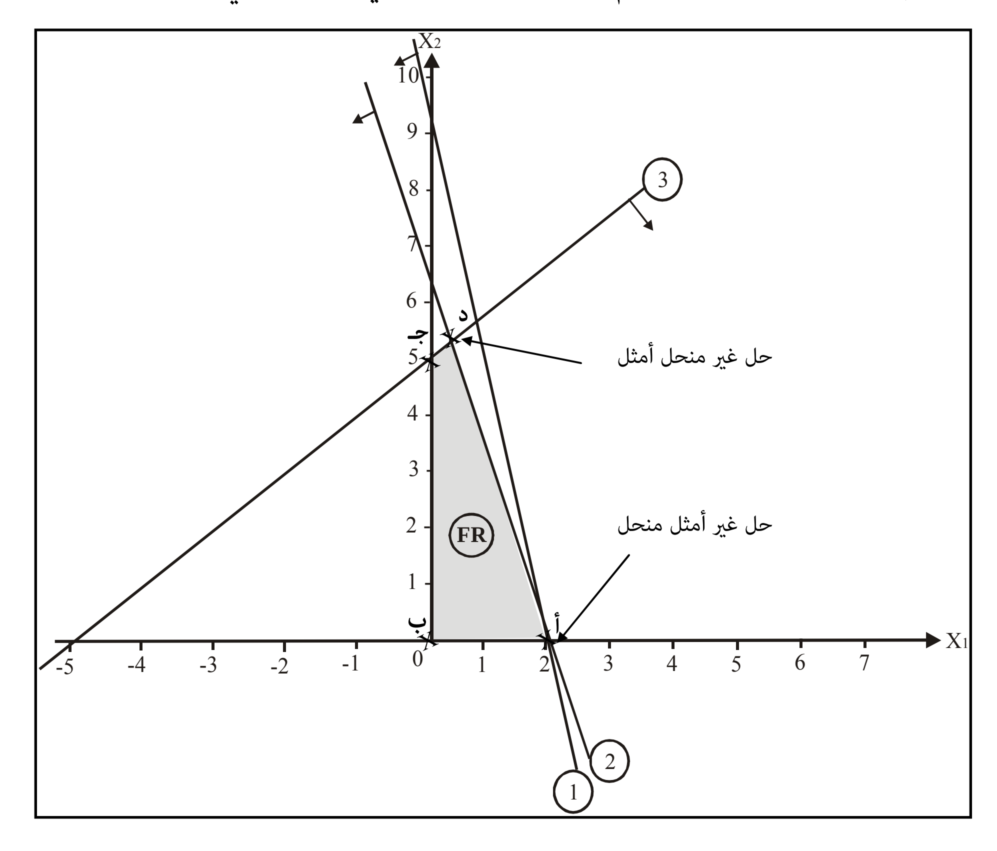
$-X1 + X_2 \leq 5$ …………………...…..(3)

3- قيد اللاسلبية

$X_1 , X_2 \geq 0$

الحل:

يمكن حل المشكلة باستخدام الطريقة البيانية كما في الشكل التالي:



من الشكل السابق يتضح أن النقاط التي تمثل زوايا منطقة الحلول الممكنة (FR) والتي هي بمثابة نقاط للحل الأفضل والتي من بينها سوف يتم تحديد نقطة الحل الأمثل، وهذه النقاط هي:

أ - (2.0) ، ب- (0.0) ، جـ- (0.5) ، د- $\left(\frac{4}{9},\frac{49}{9}\right)$

	$Z= 2X_1 + X_2$	→	Max
قيمة الدالة عند النقطة (أ)	Z = 2(2)+0	→	4
قيمة الدالة عند النقطة (ب)	Z = 2(0) + 0	→	0
قيمة الدالة عند النقطة (جـ)	Z 2(0) + 5	→	5
قيمة الدالة عند النقطة (د)	$Z = \left(\frac{8}{9}+\frac{49}{9}\right)$	→	$\frac{57}{9}$ = .33

إن قيمة الحل الأمثل عند النقطة (د) قد سبقتها قيمة لحل غير أمثل منحل عند النقطة (أ). ويمكن توضيح هذه الفكرة بشكل أكثر وضوحا من خلال اعتماد طريقة السمبلكس، وذلك كما هو واضح من الجدول رقم (2-4).

ومن الجدول المذكور يتضح أن الحل الأمثل هو:

$$Z=\frac{57}{9},\ x_2=\frac{49}{9}\ ,\ x_1=\frac{4}{9}$$

في المرحلة الثانية من الجدول المبسط (2-4) يلاحظ أن قيمة (cj-zj) المقابلة إلى المتغير (x_2) تساوي (3/7) لذلك يعد هو المتغير الداخل، كما وأن قيمة المتغير الأساسي S_1 تساوي صفرا، أي أن الحل منحلا، في حين يلاحظ أن معامل المتغير x2 المقابل إلى المتغير الأساسي S1 في مصفوفة المعاملات سالبا (-3/7) لذلك فإن المتغير الأساسي S_1 سوف لا يخرج من الحل وأن قاعدة أقل النسب تطبق على المتغيرين (S_3,X_1) فقط.

إن حالة الانحلال التي ظهرت في المرحلة الثانية من الجدول (4-2) قد اختفت في المرحلة الثالثة (المرحلة الأخيرة) وبذلك يتم الحصول على حلا أمثلا غير منحلا، من هنا يستنتج أن عند ظهور الحل المنحل في أية مرحلة من مراحل الطريقة المبسطة لا يمنع من الاستمرار في الحل لغاية الحصول على الحل الأمثل.

جدول رقم (4-2)

المتغيرات		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	قيمة المتغير الأساسي Bi	معامل المتغيرات الأساسية في دالة الهدف CB
معامل المتغيرات في Cjدالة الهدف		2	1	0	0	0		
المتغيرات الأساسية	S_1	5	1	1	0	0	10	0
	S_2	(7)	2	0	1	0	14	0
	S_3	-1	1	0	0	1	5	0
Zj		0	0	0	0	0		قيمة دالة الهدف
(Cj-Zj)		2	1	0	0			
المتغيرات الأساسية	S_1	0	-3/7	1	-5/7	0	0	0
	X_1	1	2/7	0	1/7	0	2	2
	S_3	0	(9/7)	0	1/7	1	7	0
Zj		2	4/7	0	-2/7	0	4	قيمة دالة الهدف
(Cj-Zj)		0	3/7	0	-2/7	0		
المتغيرات الأساسية	S_1	0	0	1	-2/3	1/3	7/3	0
	X_1	1	0	0	1/9	-2/9	4/9	2
	X_2	0	1	0	1/9	7/9	49/9	1
Zj		2	1	0	1/3	1/3	57/9	قيمة دالة الهدف
(Cj-Zj)		0	0	0	-1/3	-1/3		

ثانيا: الحلول غير محدودة

وهي الحالة التي تكون فيها منطقة الحلول الممكنة غير محدودة، وتحدث هذه الحالة عندما تكون المعاملات لأحد المتغيرات في جميع القيود سالبة أو تساوي صفرا، وأن مع وجود هذه الحالة قد يكون بالإمكان الحصول على الحل الأمثل وقد لا يكون أي أن هنالك اثنين من الحالات وهي:

1- حالة تكون فيها منطقة الحلول غير محدودة والحل الأمثل غير محدد.
2- حالة تكون فيها منطقة الحلول غير محدودة إلا أن الحل الأمثل محدد.

ويمكن توضيح حالات الحلول غير المحدودة من خلال المثالين التاليين:

مثال رقم ❶ منطقة الحلول غير محدودة والحل الأمثل غير محدد

النموذج الرياضي التالي يمثل المشكلات الإنتاجية:

1- دالة الهدف

$Max.Z = 4X_1 + 2X_2$

2- القيود الأساسية

$3X_1 - 2X_2 \leq 60$ …………………..(1)

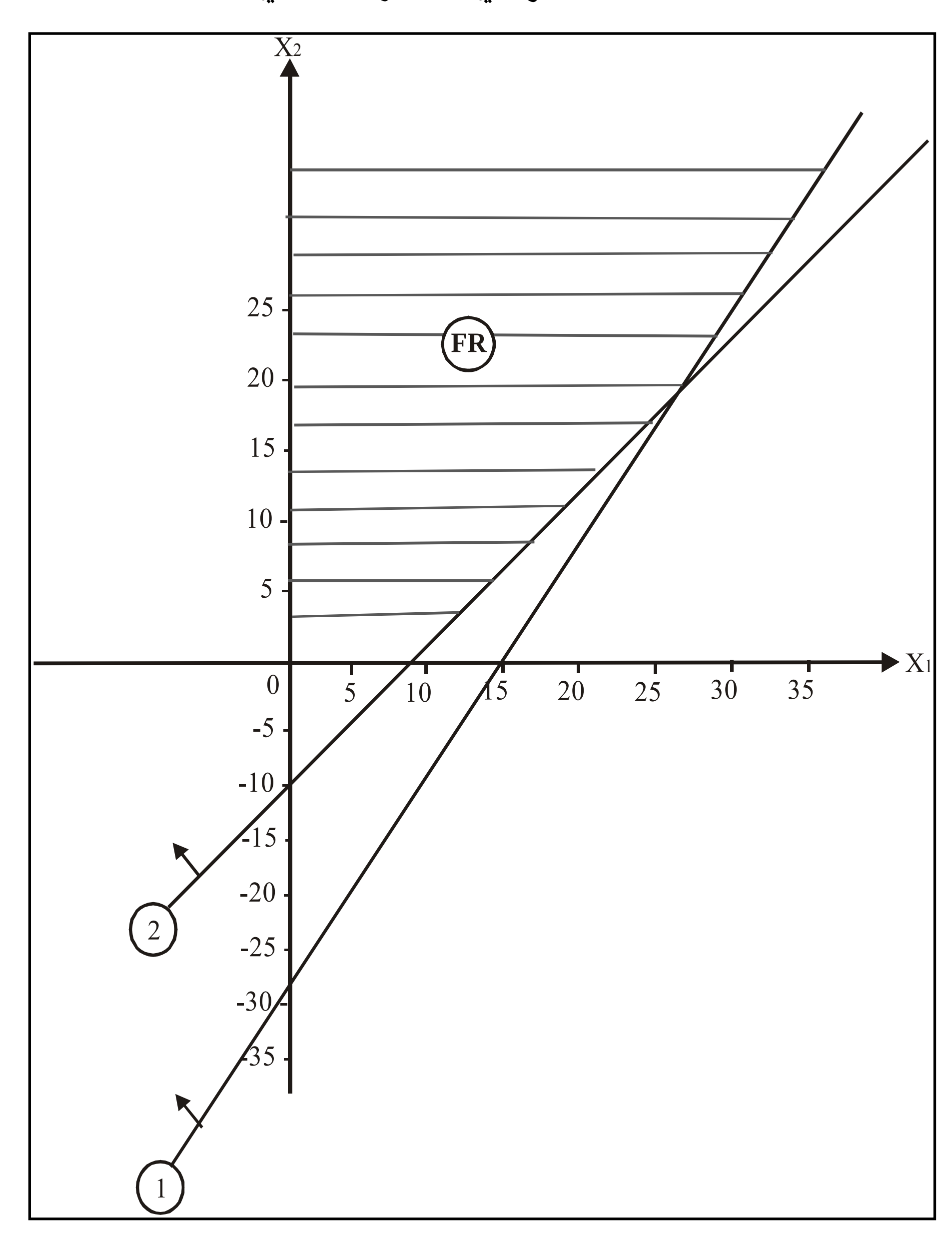
$2X_1 - 2X_2 \leq 20$ …………………..(2)

3- قيد اللاسلبية

$X_1 , X_2 > 0$

يلاحظ من النموذج الرياضي أن معاملات المتغير الثاني في كلا القيدين الأول والثاني سالبة، وهذا يعني أن قيمة هذا المتغير وكذلك قيمة دالة الهدف من الممكن أن تزداد بصورة غير محدودة من دون أن تخرج من منطقة الحل الممكن للمشكلة، من هنا يستنتج أن ليس لهذه المشكلة الخطية حلا محددا، ومن الممكن ملاحظة هذه الحالة بيانيا كما في الشكل (4-11).

شكل (4-11) منطقة حلول غير محددة وحل أمثل غير محدد



مثال رقم ❷ (منطقة الحلول غير محدودة إلا أن الحل الأمثل محدد)

النموذج الرياضي التالي يمثل إحدى المشكلات الإنتاجية:

1- دالة الهدف

$Max.Z = 2X_1 + 4X_2$

2- القيود الأساسية

$3X_1 - 2X_2 \leq 6$ ....(1)

$2X_1 - 2X_2 \leq 3$ ....(2)

3- قيد اللاسلبية

$X_1 , X_2 > 0$

الحل: لحل هذه المشكلة يتم في البداية تحديد نقاط المستقيم الأول

المستقيم الأول $3x_1 - 2x_2 = 6$

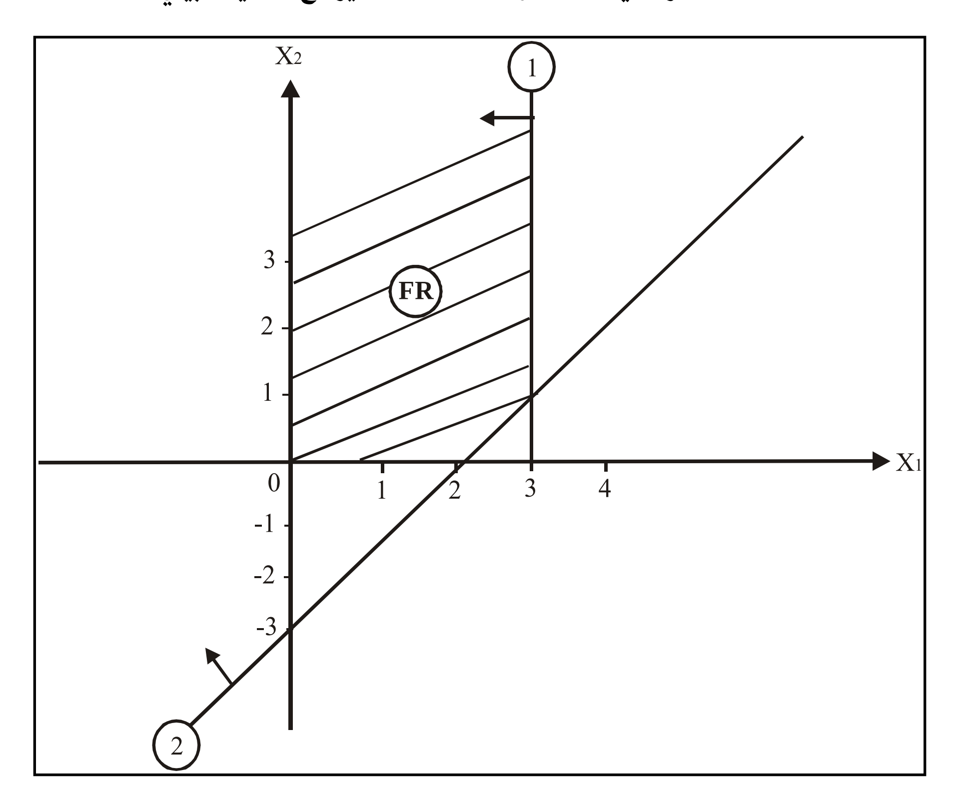
$$(0,-3)\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

$$(2,-0)\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

المستقيم الثاني $(3,0) \quad x_1 = 3$

إن الشكل البياني الذي يعبر عن هذه المشكلة كما يلي:

شكل (4-12) منطقة حلول غير محددة وحل أمثل محدد، يوضح التمثيل البياني للمشكلة



إن حل هذه المشكلة بطريقة السمبلكس يؤدي إلى نفس النتائج الوارد ذكرها أعلاه، وكما هو وارد في الجدول التالي:

المتغيرات		X_1	X_2	S_1	S_2	قيمة المتغير الأساسي Bi	المتغيرات معامل الأساسية في دالة الهدف CB
في دالة معامل المتغيرات الهدفCj		**2**	**-4**	**0**	**0**		
المتغيرات الأساسية	S_1	3	-2	1	0	6	0
	S_2	1	0	0	1	3	0
Zj		0	0	0	0	0	قيمة دالة الهدف
(Cj-Zj)		2	-4	0	0		
المتغيرات الأساسية	X_1	1	-2/3	1/3	0	2	2
	S_2	0	2/3	-1/3	1	1	0
Zj		2	-4/3	2/3	0	4	دالة الهدف قيمة
(Cj-Zj)		0	-8/3	-2/3	0		

مما تقدم يتضح أن الحل الأمثل لهذه المشكلة هو:

$Z= 4 \ , X_2 = 0, X_1 = 2$

ويلاحظ أيضا أن معاملات المتغير الثاني في كلا القيدين سالبة أو صفر (0,-2) وأن هذا يشير إلى أن منطقة الحلول غير محدودة، وهذا واضح في الشكل (4-12) وأن الحل الأمثل محدد بالقيمة (Z=4).

ثالثا: تعدد الحلول المثلى

يحدث في بعض مشكلات البرمجة الخطية أن يكون هناك أكثر من حل أمثل واحد للمشكلة، وقد يكون هناك مالا نهاية من الحلول المثلى، وهي الحلول التي تحقق نفس القيمة (العظمى أو الصغرى) لدالة الهدف. وأن هذه الحالة تحدث عندما تكون دالة الهدف موازية لأحد القيود المحايدة ويقصد بالقيد المحايد هو القيد المحدد لمنطقة الحلول الممكنة، ويمكن ملاحظة هذه الحالة في المرحلة الأخيرة من جدول الطريقة المبسطة عندما يتم الحصول على نفس قيمة الحل الأمثل عند أكثر من حل أساسي واحد، ويمكن توضيح هذه الحالة من خلال المشكلة التالية:

مثال رقم ❶

النموذج الرياضي التالي يمثل إحدى المشكلات الإنتاجية:

1- دالة الهدف　　$Max.\ 8X_1 + 4X_2$

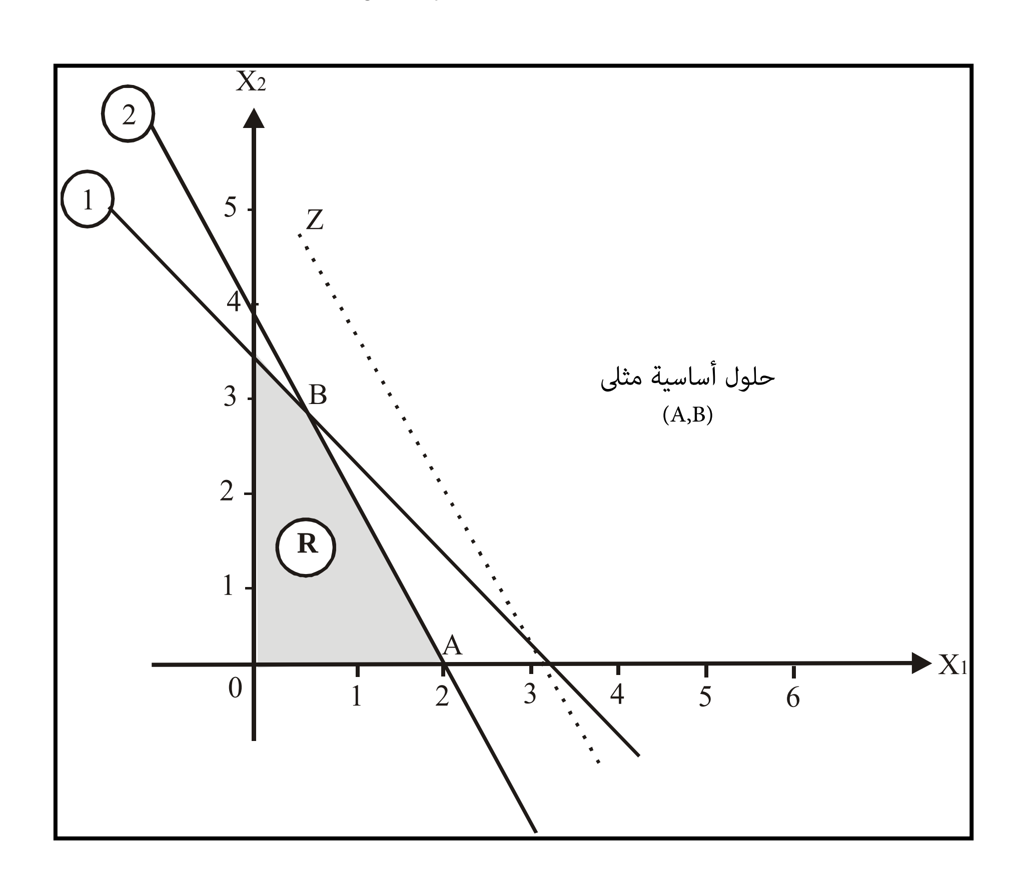
2- القيود الأساسية

$4X_1 + 2X_2 \leq 8$ ……………..(1)

$2X_1 + 2X_2 \leq 6$ ……………..(2)

3- قيد اللاسلبية　　$X_1, X_2 \geq 0$

شكل (4-13) تعدد الحلول المثلى



يلاحظ من الشكل البياني (13-4) أن مستقيم دالة الهدف (Z) يـوازي مسـتقيم القيـد الأول وهو قيد محايد، كما وأن هناك حلاّن أساسيان أمثلان للمشكلة وهما في النقطة (A) والنقطة (B)، وأن أي نقطة واقعة عـلى الخـط الـذي يصـل بـين هـذين الحلـين الأساسـيين تعطي حلا اساسيا بديلا يحقق نفس القيمة لدالة الهدف (Z) ويمكن توضيح هـذه الحالـة من خلال جدول السمبلكس رقم (3-4).

جدول السمبلكس (3-4) تعدد الحلول المثلى

معامل المتغيرات الأساسية في دالة الهدف CB	قيمة المتغير الأساسي Bi	S_2	S_1	X_2	X_1	المتغيرات	
		0	0	4	8	معامل المتغيرات في دالة الهدف Cj	
0	8	0	1	2	(4)	S_1	المتغيرات
0	6	1	0	2	2	S_2	الأساسية
قيمة دالة الهدف	0	0	0	0	2	Zj	
		0	0	4	(8)	(Cj-Zj)	
8	2	0	¼	½	1	X_1	المتغيرات
0	2	1	-1/2	1	0	S_2	الأساسية
قيمة دالة الهدف	16	0	2	4	8	Zj	
		0	-2	0	0	(Cj-Zj)	

من الجدول المذكور يتضح أن الحل الأمثل هو: ($X_2=0, X_1=2$) وأن $Z=16$.

يلاحظ من المرحلة الأخيرة في جدول السمبلكس (3-4) أن معامل المتغير غير الأساسي (X_2) في الصف (Cj-Zj) يساوي (صفرا) وأن هذا يشير إلى وجـود حـلا أمـثلا بـديلا، كـما وأن هذا الحل البديل أساسيا طالما سيصبح المتغير (X_2) متغـيرا أساسـيا، والجـدول (4-4) يوضـح ذلك.

جدول السمبلكس (4-4) الحل الأمثل الجديد

معامل المتغيرات الأساسية في دالة الهدف CB	قيمة المتغير الأساسي Bi	S_2	S_1	X_2	X_1	المتغيرات	
		0	0	4	8	معامل المتغيرات في دالة الهدف Cj	
8	1	-1/2	½	0	1	X_1	المتغيرات الأساسية
4	2	1	-1/2	1	0	X_2	
قيمة دالة الهدف	16	0	2	4	8	Zj	
		0	-2	0	0	(Cj-Zj)	

الحل الأمثل الجديد هو: $X_2 = 2, X_1=1$ وأن Z=16. إن قيمة الهدف (Z) لم تتغير قيمتها عما هي عليه في الحالة السابقة، وهذا شيء بديهي طالما أن معامل (X_2) في الصف الأخير من الجدول المذكور يساوي صفرا، وبذلك أصبح لدينا حلين أساسيين بديلين هما:

الحل الأول $X_2=0$ $X_1=2$ $Z=16$

الحل الثاني $X_2=2$ $X_1=1$ $Z=16$

وأن بالإمكان الحصول على ما لا نهاية من الحلول الأساسية.

ورياضيا يمكن الحصول على مجموعة الحلول المثلى البديلة كالآتي:

$X_1 = \lambda(2) + (1-\lambda)$......................(1)

$X_2= (0) + (1-\lambda)$ ....(2)

أي أن

$X_1 = \lambda + 1$

$X_2 = 2-2\lambda$

حيث أن

$0 \leq \lambda \leq 1$

إن حل المشكلة في ظل المتغيرات (X_1, X_2) يعطي عادة نفس القيمة لـ (Z) عند أي قيمة لـ (λ).

إن حالة تعدد الحلول المثلى لمشكلة البرمجة الخطية حالة مرغوبة بالنسبة لمتخذي القرار لكونها توفر لهم عدة بدائل لاتخاذ القرار المناسب وذلك عندما يتعلق الأمر بتخطيط الإنتاج أو ترشيد القرارات المتعلقة به.

رابعا: عدم وجود حلول ممكنة

إن هذه الحالة تحدث عندما لا تكون هناك نقطة واحدة على الأقل تحقق جميع قيود المشكلة. أي أن منطقة الحلول الممكنة عبارة عن مجموعة خالية، ولتوضيح هذه الحالة نستعين بالمشكلة التالية:

مثال

النموذج الرياضي التالي يوضح إحدى المشاكل الإنتاجية

1- دالة الهدف $Max.z = 2X_1 + X_2$

2- القيود الأساسية

$3X_1 + 2X_2 \leq 6$ ……………..(1)

$2X_1 + 3X_2 \leq 12$ ……………..(2)

3- قيد اللاسلبية $X_1 , X_2 \geq 0$

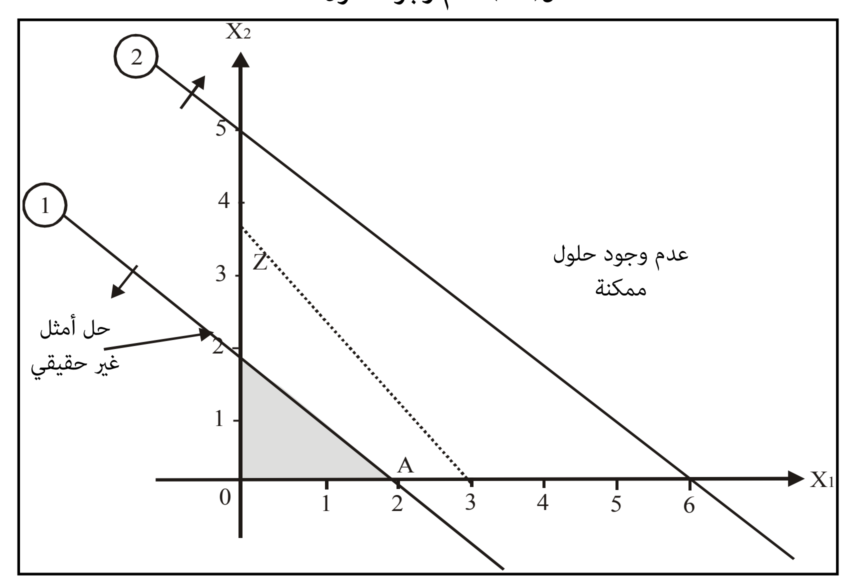
الحل:

في البداية سوف نعتمد طريقة السمبلكس لإيجاد الحل لهذه المشكلة، والجدول أدناه يوضح حل هذه المشكلة بالطريقة المذكورة.

المتغيرات		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	Bi	CB
معامل المتغيرات في دالة الهدف Cj		2	1	0	0	-M		
المتغيرات الأساسية	S_1	3	(2)	1	0	0	6	0
	S_2	2	3	0	-1	1	12	-M
Zj		-2M	-3M	0	M	-M	12M	قيمة دالة الهدف
(Cj-Zj)		2+2M	1+3M	0	-M	0		
المتغيرات الأساسية	X_2	3/2	1	1/2	0	0	3	1
	A_2	-5/2	0	-3/2	-1	1	3	-M
Zj		3/2+ (5/2)M	1	½+ (3/2)M	M	-M	3-3M	قيمة دالة الهدف
(Cj-Zj)		½- (5/2)M	0	-1/2- (3/2)M	-M	0		

إن الحل في المرحلة الأخيرة من الجدول أعلاه يتوفر فيه شرط الحل الأمثل، في حين يلاحظ أنه متضمنا متغيرا اصطناعيا (A_1) وأن قيمته (3) وهذا يشير إلى أن ليس هناك حلا ممكنا للمشكلة كما وأن القيمة الموجبة لـ (A_1) تعني أن القيد الثاني غير منطقة ومتناقض مع القيد الأول، ويمكن توضيح هذه الحالة بيانيا في الشكل (4-14).

شكل(4-14) عدم وجود حلول ممكنة



3.4 النموذج الأولي والنموذج المقابل Brimery and Dual Model

إن النماذج الرياضية السابقة التي تم توضيحها في الفقرات السابقة تمثل النموذج الأولي Primery Model وهو القاعدة التي على أساسها يتم صياغة النموذج الرياضي للمشكلة، ولهذا النموذج يوجد نموذج مقابل Dual يتم من خلاله الحصول على مؤشرات كمية وقيم اقتصادية مختلفة، مع العلم أن قيمة دالة الهدف عادة تكون متساوية في كلا الحالتين. وبشكل عام أن لكل نموذج أولي يوجد هناك نموذج مقابل أو ثنائي، وأن لكل نموذج مقابل Dual يوجد هناك نموذج أولي Primal، ومن أجل الدخول في توضيح هذه الأفكار المرتبطة بالعلاقة بين هذين النموذجين لا بد لنا في البداية من توضيح بعض المفاهيم كما هو وارد في الفقرات التي سترد أدناه.

1.3.4 مفهوم النموذج الأولي ومتطلباته الأساسية

بعد أن يتم تحديد البيانات الخاصة بالمشكلة، يتم التعبير عنها من خلال الرموز والفرضيات والعلاقات الرياضية. أي بعبارة أخرى يتم تهيئة المتطلبات الأساسية لعملية صياغة النموذج الرياضي. أي أن الصياغة الرياضية للنموذج الرياضي هي الأساس في البدء بمعالجة المشكلة تمهيدا لحلها وإيجاد الحلول النهائية لها. إن صيغة النموذج الرياضي لمشكلة معينة تكتب عادة بالصيغة الأولية، كما هو واضح في النموذج الخطي التالي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$Z= c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \text{Max.}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

إن الحل النهائي الذي يتم الحصول عليه عند حل هذا النموذج يعتبر مقبولا من الناحية العلمية والعملية إذا توفرت فيه اثنين من الشروط الأساسية، وهي:

I. Optimality الأمثلية

II. Feasiablity أن يكون الحل ممكنا

وفيما يلي توضيح لكل واحدة من هذه الحالات.

أولا: شرط الأمثلية Optimality

من المعروف عند حل أية مشكلة أن الحصول على الحل الأمثل يتم بعد إجراء عدد من المراحل مرورا بالحل الممكن ثم الحل الأفضل. ويكون الحل الأمثل في آخر مرحلة من مراحل حل المشكلة. وعندما يتم الحل بطريقة السمبلكس Simplex Method فإن عملية التحقق من الوصول إلى الحل الأمثل يكون من خلال الحقل (Cj-Zj)، حيث من المعروف في هذا الصدد أن عملية التحقق تتم على النحو التالي:

1- في حالة تعظيم دالة الهدف (Max.Z) فإن: $(cj\text{-}zj) \leq 0$

2- في حالة تصغير دالة الهدف (Min.Z) فإن: $(cj\text{-}zj) \geq 0$

لذلك نجد في الحالة الأولى أن قيم الحقل (cj-zj) هي قيم سالبة وأصفار وفي الحالة الثانية نجد أن كل قيم الحقل (cj-zj) في قيم موجبة وأصفار. وإذا ما ظهرت قيمة غير ما هو وارد أعلاه فإن ذلك يعني أن الحل الذي تم الحصول عليه ليس أمثلا.

ثانيا: شرط أن يكون الحل ممكنا Feasiability

في نهاية أي نموذج رياضي يوجد شرط أساسي يعرف بشرط اللاسلبية $(Xj \geq 0)$، وهو يعني أن كل قيم المتغيرات الداخلة في صياغة النموذج الرياضي (xj) هي أما أن تكون كمية موجبة أكبر من الصفر أو تساوي صفر. وفي حالة ظهور قيمة سالبة في المرحلة الأخيرة من الحل وبالتحديد في مرحلة الحل الأمثل، فإن ذلك يتعارض مع مفهوم وفكرة هذا الشرط، أي أن الحل يصبح غير ممكنا.

مما تقدم يتضح عند توفر شرط الأمثلية مع ظهور قيم سالبة للمتغيرات (xj) فإن ذلك يعتبر غير مقبولا من الناحية العلمية والعملية حيث لا يجوز مثلا أن تكون قيم المنتجات سالبة. إن معالجة هذه الحالة يكون من خلال اعتماد أسلوب النموذج المقابل Dual Model. إن فكرة هذا النموذج هو تحوير النموذج الرياضي الأولي وقلب كافة مفرداته من متغيرات وعلامات رياضية وغير ذلك. وذلك من أجل معالجة القيم

السالبة للمتغير (xj). إضافة إلى ذلك فإن للنموذج المقابل فوائد أخرى منها أنه يعالج مسألة تعدد المتغيرات في العلاقات الرياضية وتسهيل عملية الحل باستخدام الأسلوب البياني. ومن الفوائد الأخرى هو الحصول على تحليلات كمية مختلفة ومن أهمها تحديد أسعار الظل Shadow Price.

2.3.4 قواعد تحويل النموذج الأولي إلى النموذج الثنائي

من أجل تحويل النموذج الرياضي الأولي Primal إلى صيغة النموذج الثنائي Dual Model يتطلب الأمر إجراء التغييرات التالية:

1- قلب مصفوفة المعاملات بحيث يصبح الصف عمود والعمود صف.

2- تبديل رموز المتغيرات من (x) إلى أي رمز آخر وليكن (y).

3- تبديل موقع القيم الحرة مع معاملات دالة الهدف بحيث يصبح أحدهم مكان الآخر.

4- إذا كانت العلامة (≤) تصبح (≥) وبالعكس وإذا كانت علاقة مساواة (=) يعاد ترتيب العلاقة الرياضية وتستبدل باثنين من العلامات الرياضية (≤،≥).

5- إذا كانت دالة الهدف (z) تصل في النموذج الأولي إلى .Max تصبح .Min في حالة النموذج المقابل أو الثنائي.

6- يستبدل رمز دالة الهدف Z بأي حرف آخر وليكن W.

من أجل توضيح فكرة عملية التحويل الوارد ذكرها أعلاه نأخذ عدد من الأمثلة.

مثال:

توفر لديك النموذج الرياضي الأولي التالي:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow Max$

$x_1, x_2 \geq 0$

المطلوب إيجاد النموذج الثنائي (المقابل)

الحل: في البداية يتم تجزئة النموذج الرياضي كما يلي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

الخطوة التالية يتم إدخال المتغيرات الجديدة وتبديل العلاقات وبقية الإجراءات الأخرى.

$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \geq c_1$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq c_2$

$w = b_1y_1 + b_2y_2 \rightarrow Min$

$y_1, y_2 \geq 0$

وبنفس الطريقة يتم معالجة الصيغة القانونية للبرمجة الخطية Canonical form of linear Programming وذلك كما يلي:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_1nxn \leq b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_2nx \leq b_2 \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \quad \vdots \\ &am_1x_1 + am_2x_2 + \ldots + amnxn \leq bm \end{aligned}$$

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + cnx_2 \rightarrow Max.$

$x_1, x_2, \ldots, xn \geq 0$

في البداية يتم سحب مصفوفة المعاملات وكما يلي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_1n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ am_1 & am_2 & \cdots & amn \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & am_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & am_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1n & a_2n & \cdots & amn \end{bmatrix}$$

وبعد ذلك تتم الإجراءات الأخرى:

$$\begin{matrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + am_1ym \geq b_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + am_2ym \geq b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_1ny_1 + a_2ny_2 + \ldots + amnyn \geq cn \end{matrix}$$

$W= b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + bmym \rightarrow Min.$

$y_1, y_2, \ldots , ym \geq 0$

3.3.4 أساليب معالجة النموذج الأولي والثنائي

إذا كان عدد متغيرات النموذج الرياضي (سواء كان ذلك في حالة النموذج الأولي أو النموذج الثنائي) اثنين فقط، فإن في هذه الحالة يتم اللجوء إلى طريقة الرسم Graphical Method في حل المشكلة وإيجاد النتائج النهائية.

أما إذا كان عدد المتغيرات أكثر من اثنين، فإن في هذه الحالة يتم اللجوء إلى طريقة السمبلكس، حيث أن:

1- إذا كان المطلوب تعظيم دالة الهدف Max.Z، فإن في هذه الحالة تستخدم طريقة السمبلكس الاعتيادية.

2- إذا كان المطلوب تصغير دالة الهدف Min.Z، فإن في هذه الحالة تستخدم أحد الطرق التالية:

أ- أسلوب M-Tehnique (Big-M)

ب- أسلوب الوجهان Two Phase Tehnique.

إن النموذج الثنائي Dual Model الذي يتم معالجته بالطرق المشار إليها أعلاه يسمى بـ Dual Simplex السمبلكس الثنائي، وسوف يرد توضيح ذلك في فصول لاحقة.

مثال رقم ❶

توفر لديك النموذج الرياضي التالي الذي يعبر عن أحد المشاكل الإنتاجية:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x_1 + 2x_2 \le 4 \\ (2) & 3x_1 + x_2 \le 6\end{array}\right\}\text{Primery form}$$

$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{Max.}$

$x_1 , x_2 \ge 0$

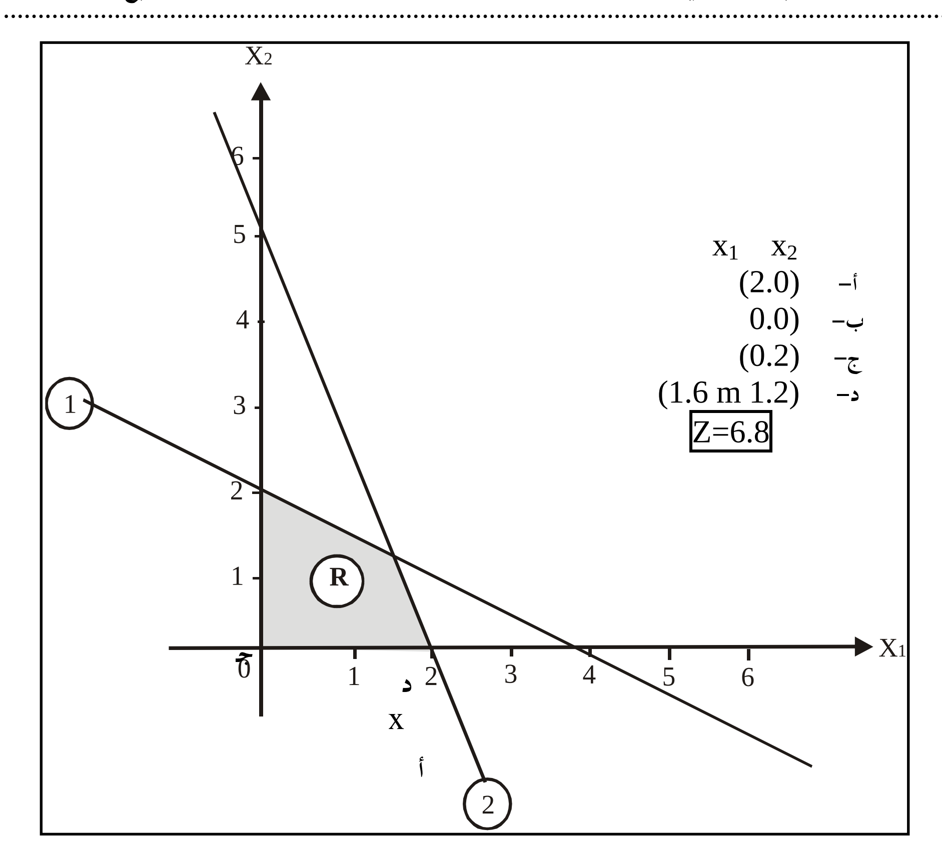
المطلوب:

حل النموذج الرياضي أعلاه بطريقة الرسم.

تحويل النموذج الرياضي الأولي إلى النموذج الثنائي وحل النموذج باستخدام طريقة الرسم.

الحل:

إن حل هذا النموذج الرياضي يكون كما يلي:



إن تحويل النموذج الرياضي السابق من الصيغة الأولية إلى الثنائية يتم كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

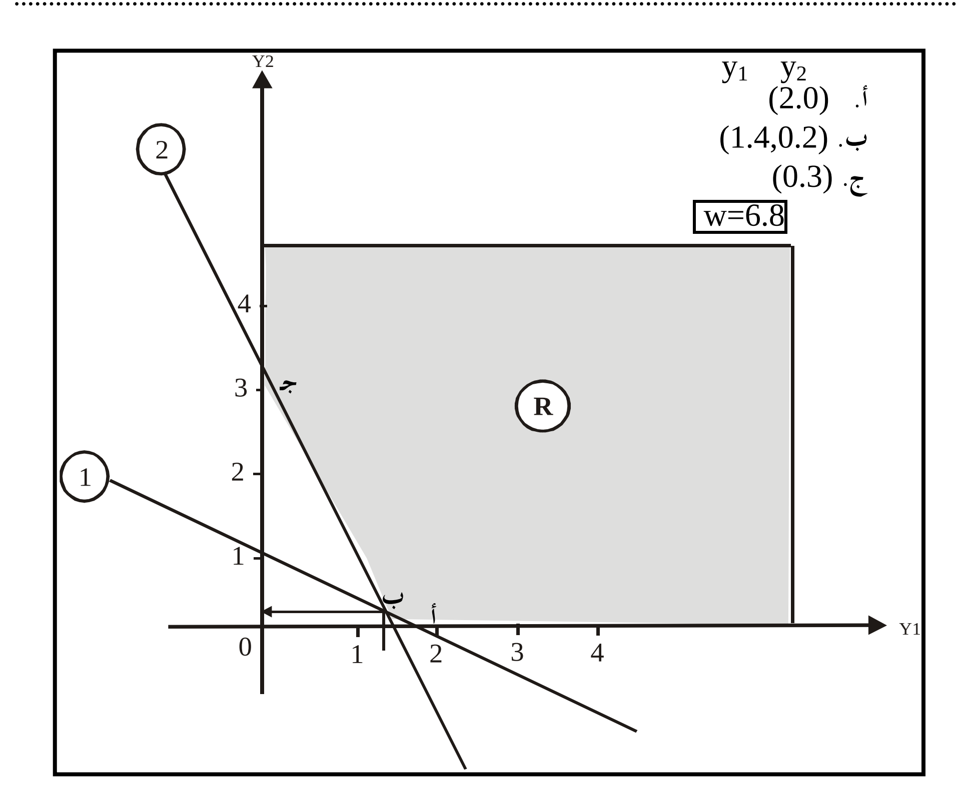
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & y_1 + 3y_2 \ \geq \ 2 \\ (2) & 2y_1 + y_2 \ \geq \ 3 \end{array}\right\} \text{Daulity form}$$

$$w = 4y_1 + 6y_2 \longrightarrow \text{Min}$$

$$y_1 \, , \ y_2 \geq 0$$

والرسم البياني لهذا النموذج هو كما يلي:



مثال رقم 2

توفر لديك النموذج الرياضي التالي الذي يعبر عن أحد المشاكل الإنتاجية.

(1) $3x_1 + x_2 = 3$

(2) $4x_1 + 3x_2 \geq 6$

(3) $x_1 + 2x_2 \leq 3$

$Z= 4x_1 + x_2 \rightarrow$ Min.

$x_1 , x_2 \geq 0$

المطلوب:

حل المشكلة واستخراج النتائج النهائية باستخدام طريقة M-Techniqu.

صياغة النموذج الرياضي الثنائي ومن ثم حل المشكلة باستخدام طريقة السمبلكس الاعتيادية.

الحل:

إن حل هذه المشكلة يبدأ بتحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية وذلك كما يلي:

(1) $3x_1 + x_2 + R_1 = 3$

(2) $4x_1 + 3x_2 - S_2 + R_2$

(3) $x_1 + 2x_2 + S_3 = 3$

$Z = 4x_1 + 2x_2 + 0.s_2 + 0.s_3 + MR_1 + MR_2 \longrightarrow$ Min.

Let $M \Longrightarrow 100$

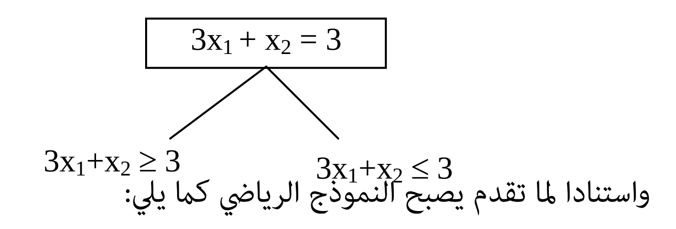
$Z = ux_1 + x_2 + 0.s_1 + 0.s_3 + 100R_1 + 100R_2 \longrightarrow$ Min.

إن حل هذا النموذج يكون باستخدام طريقة السمبلكس كما في الجدول التالي:

المتغيرات		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	قيمة المتغير الأساسي Bi	معامل المتغيرات الأساسية في دالة الهدف CB
معامل المتغيرات في دالة الهدف Cj		4	1	0	0	100	100		
المتغيرات الأساسية	R_1	3	1	0	0	1	0	3	100
	R_2	4	3	-1	0	0	1	6	100
	S_3	1	2	0	1	0	0	3	0
Zj		700	400	-100	0	100	100	900	Z
(Cj-Zj)		-696	-399	100	0	0	0		
المتغيرات الأساسية	X_1	1	0.3	0	0	0.3	0	1	4
	R_2	0	1.7	-1	0	-1.3	1	2	100
	S_3	0	1.7	0	1	-0.3	0	2	0
Zj		4	171.2	-100	0	-129	100	204	Z
(Cj-Zj)		0	-170.2	100	0	229	0		
المتغيرات الأساسية	X_1	1	0	0.2	0	0.5	-0.2	0.6	4
	X_2	0	1	-0.6	0	-0.8	0.6	1.2	1
	S_3	0	0	1	1	1	-1	0	0
Zj		4	1	0.2	0	1.2	-0.2	3.6	Z
(Cj-Zj)		0	0	-0.2	0	99	100.2		
المتغيرات الأساسية	X_1	1	0	0	-0.2	0.3	0	0.6	4
	X_2	0	1	0	0.6	-0.2	0	1.2	1
	S_2	0	0	1	1	1	-1	0	0
Zj		4	1	0	-0.2	1	0	3.6	Z
(Cj-Zj)		0	0	0	0.2	99	100		

نقطة الحل الأمثل

2- إن المطلـوب الثـاني يبـدأ بتحويـل صـيغة النمـوذج الريـاضي الأولي إلى النمـوذج الثنائي، ولا توجد مشكلة بالنسبة لكل من القيد الثاني والثالث، إلا أننا نلاحظ أن الصعوبة تكمن في القيد الأول الذي يحمـل علامـة المسـاواة، حيـث أن هـذا القيـد يتطلـب إجـراء رياضي خاص من أجل إدخاله ضمن جسم النمـوذج الريـاضي، وهـذا الإجـراء هـو تجزئـة القيد رقم (1) إلى قيدين وذلك كما يلي:



واستنادا لما تقدم يصبح النموذج الرياضي كما يلي:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ (2) & 3x_1 + x_2 \leq 3\end{array}\right\} 3x_1 + x_2 = 3$$

$$\begin{array}{ll}(3) & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ (4) & x_1 + 2x_2 \leq 3\end{array}$$

$Z = 4x1 + x2 \rightarrow$ Min.

$x_1 , x_2 \geq 0$

يتم ضرب العلاقة الرياضية رقـم (2)، رقـم(4) بــ (-1)وذلـك مـن أجـل توحيـد العلامـات الرياضية بحيث تصبح جميعها (≥).

$$\left.\begin{array}{rl} & 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ -1 & 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ -1 & x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ -3x_1 - x_2 \geq -3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ -x_1 - 2x_2 \geq -3 \end{array}$$

ويتم إدخال المتغيرات الجديدة $(\bar{y}_1 \quad y''_1 \quad y_2 \quad y_3)$ كما يلي:

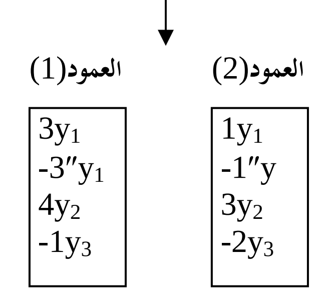
$$\begin{matrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_1 \\ ''y_1 & ''y_1 \\ y_2 & y_2 \\ y_3 & y_3 \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$'y_1$ ……………………….$3x_1 + x_2 \geq 3$

$''y$ …………………… $-3x_1 - x_2 \geq -3$

y_2 ……………………..$4x_1 + 3x_2 \geq 6$

y_3 ……………………..$-x_1 - 2x_2 \geq -3$



يتم تحويل العمود (1) إلى الصف (1) والعمود (2) إلى الصف (2) وذلك كما يلي:

الصف(1) $\left|3'y_1 - 3''y_1 + 4y_2 - y_3\right|$

الصف (2) $\left|y_1 - y_1'' + 3y_2 - 2y_3\right|$

الخطوة التالية هي وضع العلامات الرياضية وتحديد القيم الحرة ومعاملات دالة الهدف وذلك كما يلي:

(1)..........$3'y_1 - 3''y_1 + 4y_2 - y_3 \leq 4$

(2).......... $'y_1 - ''y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 1$

$w = 3'y_1 - 3''y_1 + 6y_2 - 3y_3 \rightarrow$ Max.

$'y_1, ''y_2, y_3, y_4 \geq 0$

$3('y_1-''y_1) + 4y_2 - y_3 \leq 4$

$1('y_1-''y_1) + 3y_2 - 2y_3 \leq 1$

$w= 3('y_1-''y_1) + 6y_2 - 3y_3 \rightarrow Max.$

وبالتعويض عن كل من $('y_1-''y_1) \Rightarrow y_1$

نحصل على ما يلي:

(1) …….. $3y_1 + 7y_2 - y_3 \leq 4$

(2)……… $y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 1$

$w = 3y_1 + 6y_2 - 3y_3 \rightarrow Max.$

$y_2, y_3 \geq 0$

$y_1 \Rightarrow$ unrestricted غير محدد الإشارة

من أجل حل هذا النموذج الرياضي يتم في البداية تحويل الصيغة الرياضية أعلاه إلى الصيغة القياسية، وكما يلي:

$3y_1 + 4y_2 - y_3 + S_1 = 4$

$y_1 + 3y_2 - 2y_3 + S_2 = 1$

$w = 3y_1 + 6y_2 - 3y_3 + 0.s_1 + 0.s_2 \rightarrow Max.$

$y_2, y_3 \geq 0$

$y_1 \Rightarrow$ Unrestricted

$S_1, S_2 \geq 0$

إن حل هذا النموذج يتم باستخدام طريقة السمبلكس كما في الجدول التالي:

جدول السمبلكس لحل النموذج الثنائي

Simplex Method

المتغيرات		y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	قيمة المتغير الأساسي Bi	معامل المتغيرات الأساسية في دالة الهدف CB
معامل المتغيرات في دالة الهدف Cj		3	6	-3	0	0		
المتغيرات الأساسية الحل الممكن	S_1	3	4	-1	1	0	4	0
	S_2	1	3	-2	0	1	1	0
Zj		0	0	0	0	0	0	w
(Cj-Zj)		3	6	-3	0	0		
المتغيرات الأساسية الحل الأفضل	S_1	1.7	0	1.7	1	-1.3	2.7	0
	y_2	0.3	1	-0.7	0	0.3	0.3	6
Zj		1.8	6	-4.2	0	1.8	1.8	W
(Cj-Zj)		1.2	0	1.2	0	-1.8		
المتغيرات الأساسية الحل الأمثل	y_1	1	0	1	0.6	-0.8	1.6	-3
	y_2	1	1	0	0.4	-0.2	1.4	6
Zj		3	6	-3	1	1.2	3.6	W
(Cj-Zj)		0	0	0	-1	-1.2		

الحل الأمثل

4.4 البرمجة الخطية في ظل دوال الهدف المركبة (المزدوجة)

إن بعض النماذج المطورة ضمن البرمجة الخطية يتم بموجبها معالجة مشاكل في الواقع العملي مع بنظر الاعتبار تحقق نوعين من الأحداث في وقت واحد على سبيل المثال تعظيم العوائد من جهة وتقليل استغلال مدخلات الإنتاج من جهة أخرى. وفي هكذا نوع من الحالات يفترض أن تتم عملية صياغة دالة الهدف في شكل علاقة مزدوجة وقد تكون في صيغة نسبة وتناسب، وتعرف هذه الحالة أيضا ببرمجة الأهداف.

من المعروف أن في بعض المشاكل في تخطيط الإنتاج يؤخذ بنظر الاعتبار عدد من المؤشرات في صياغة النموذج الرياضي للمشكلة كأساس للمفاضلة، ومن ذلك مثل ما يلي:

- كلفة الوحدة الواحدة.
- الإنتاجية (العمل، رأس المال، ...الخ).
- غير ذلك.

حيث تؤخذ هذه المؤشرات مع مؤشر الربحية الذي قد يكون في حالة تنافر مع بعضها البعض.

إن النموذج الرياضي في حالة برمجة الأهداف يتكون من عدد من الأنواع من القيود، بعضها في صيغة العلاقة الخطية، والبعض الآخر في صيغة علاقات رياضية عادية مع دالة هدف تكون عادة في صيغة بسط ومقام. مع العلم أن كل منها يفترض أن يكون في صيغة رياضية خطية.

1.4.4 صياغة النموذج الرياضي لمشكلة اختيار بدائل الإنتاج

من أجل توضيح الكيفية التي بموجبها يتم صياغة هكذا نوع من النماذج الرياضية وبالتحديد في ظل دالة تعدد الأهداف، نأخذ المثال التالي:

على سبيل المثال لو أن إحدى المنشآت الإنتاجية تنتج كميات من الإنتاج يصل عددها إلى $(x_1,x_2,\ldots,xn)$ ويتم لهذا الغرض تسخير عدد من مستلزمات الإنتاج يصل عددها إلى r، وعلى هذا الأساس، فإن مصفوفة المعاملات التي تمثل مقدار ما هو مستهلك من مستلزمات الإنتاج (i) لطرح كميات الإنتاج (j) هو كما يلي:

$$A \Rightarrow [aij] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}, & \cdots & a_1n \\ a_{21} & a_{22}, & \cdots & a_2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ar_1 & ar_2 & \cdots & arn \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث أن:

j= 1,2,…, r

j = 1,2,….n

وأن مقدار ما هو متوفر من مستلزمات الإنتاج هو كما يلي:

$$B \Rightarrow [bi] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ br \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

هيكل الإنتاج يتم التعبير عنه من خلال الصف التالي:

$x \Rightarrow [xj] = [x_1, x_2,\ldots xn]$………………….(3)

بالإضافة إلى ما تقدم، يتم وضع التعاريف التالية:

=Cj معامل قيمة الإنتاج الإضافي الذي يرتبط بـ j من المنتجات

= Dj مقدار العمل الذي يرتبط بـ j من المنتجات

المطلوب هو تحديد هيكل الإنتاج الذي من شأنه أن يعظم إنتاجية العمل. إن هـذا الأخير عبارة عن نسبة وتناسب بين قيمة الإنتاج الإضافي لكل وحـدة واحـدة مـن العمـل، كما هو واضح من العلاقة الرياضية التالية:

$$G(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} cjxj}{\sum_{j=1}^{n} djxj} \quad \text{...(4)}$$

إن G(x) هـي دالـة رياضـية تعـبر وهـي بمثابـة مـؤشر لفاعليـة أو كفـاءة اسـتخدام الاتفاقات المتاحة.

وعلى أساس ما تقدم يمكن بناء نموذج رياضي خطي كما هو واضح أدناه:

$$\left.\begin{array}{l} G(x) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} cjxj}{\sum_{j=1}^{n} djxj} \rightarrow \text{Max} \\ \sum_{j=1}^{n} aijxj \le bi \quad (i = 1,2,...,r) \\ xj \ge 0 \\ cj, dj \ge 0 \qquad (j = 1,2,...,n) \end{array}\right\} \text{..................................(5)}$$

من خلال تحليل العلاقات الرياضية رقم (5) نلاحظ أن العلاقة الأولى التي تعـبر عـن دالة الهدف G(x) يمكن أن تجزأ إلى جزئين وكما يلي:

$$G_1(x) = \sum_{j=1}^{n} cj\,xj \rightarrow \text{Max.} \text{..(6)}$$

$$G_2(x) = \sum_{j=1}^{n} djxj \rightarrow \text{Min} \text{..(7)}$$

وذلك على أساس القيد المشار إليه أعلاه في العلاقة رقم (5).

2.4.4 صياغة النموذج الرياضي لمشكلة مزج المكونات (التغذية)

لتوضيح فكرة صياغة هكذا نوع من النماذج الرياضي في ظل تعدد الأهداف وبرمجتها نأخذ على سبيل المثال الحالة التطبيقية التالية:

إحدى المزارع تشتري m من أنواع الأعلاف بالكميات xj، حيث أن: j=1,2,...,m. وذلك من أجل تغذية الدواجن التي تربى فيها. ويتطلب الأمر هنا أن تكون الأعلاف المشتراة تحتوي على مكونات محددة (i=1,2,...,q) ممزوجة مع بعضها بكميات وأنواع كما هو واضح في العمود التالي:

$$C \Rightarrow [ci] = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_q \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

إن مقدار أو كمية هذه المكونات الداخلة في تركيب الوحدة الواحدة من العلف (I من المكونات في j من الأعلاف) تتضح من خلال المصفوفة التالية:

$$B = [bij] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_1m \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_2m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{q1} & B_{q2} & \cdots & B_qm \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

إن كمية المشتريات من العلف يمكن التعبير عنها من خلال الصف التالي:

$$x \Rightarrow [xj] = [x_1, x_2 ...., xm] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

ويرد في هذا الصدد عدد من التعاريف، وهي:

Pj = سعر شراء وحدة وزنية (كغم، طن،...) واحدة من العلف j

Zj = الفاعلية أو التأثير (على سبيل المثال زيادة وزن الدواجن) لشراء وحدة واحدة من j من العلف.

المطلوب هو تحديد كمية ونوعية الأعلاف الواجب شرائها وذلك بالاستناد إلى مـؤشر فاعلية مزدوج (مركب صيغة نسبية).

$$G(x) = \frac{\sum_{j=1}^{m} zjxj}{\sum_{j=1}^{m} pj\,xj} \quad \text{...(11)}$$

النموذج الرياضي السابق يمكن أن يقدم بشكل موحد على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \dfrac{\sum_{j=1}^{m} zjxj}{\sum pj\,xj} \rightarrow \quad Max \\ \sum_{j=1}^{m} Bij\,xj \geq ci \qquad (i = 1,2,...,q) \\ xj \geq 0 \qquad (j = 1,2,...,m) \end{array}\right\} \text{...........................(12)}$$

إن الدالة المزدوجة الـواردة أعـلاه، هـي عبـارة عـن تركيـب يتكـون مـن اثنـين مـن المؤشرات وذلك كما يلي:

$$F_1(x) = \sum_{j=1}^{m} zjxj \rightarrow Max \text{ ....(13)}$$

$$F_2(x) = \sum_{j=1}^{m} pjxj \rightarrow Min. \text{...(14)}$$

مثال رقم ❶

أحد معامل الألبسة المتخصصة لديها إمكانية لطـرح نـوعين مـن القماصـل الجلديـة (رجالي، نسائي)، ويحتاج العمل هنا إلى ثلاثـة أنـواع مـن الجلـود تتناسـب وطبيعـة هـذه المنتجات مع العلم أن كميات هذه الجلود محدودة كما هو واضح في الجدول التالي:

المواد الأولية اللازمة للإنتاج	استهلاك المواد الأولية لكل واحدة إنتاج		مقدار ما هو متوفر من الجلود للإنتاج
	قمصلة نسائي	قمصلة رجالي	
الجلد I	2	1	قطعة 9000
الجلد II	1	1	قطعة 5500
الجلد III	1	2.5	قطعة 16000

1- ينبغي إنتاج على الأقل 1000 قطعة من كل نوع من المنتجات الرجالية والنسائية.

2- تكاليف إنتاج الوحدة الواحدة من القماصل النسائية 20 دينار.

من القماصل الرجالية 50 دينار

3- إذا تم بيع قمصلة واحدة من النوع النسائي يكون الإيراد 100$.

من النوع الرجالي يكون الإيراد 50$.

المطلوب:

ما هي كمية ونوعية الإنتاج التي تضمن لمعمل الألبسة الحصول على أكبر قدر ممكن من الإيراد بالعملة الصعبة $ مع الحفاظ على أقل مستوى ممكن من التكاليف.

الحل:

من منطوق السؤال أعلاه يتضح أن هناك هدف مزدوج، وفي البدء بعملية الحل نضع الفرضيات التالية:

$X_1 \Leftarrow$ كمية الإنتاج من القماصل النسائية.

$X_2 \Leftarrow$ كمية الإنتاج من القماصل الرجالية.

وعلى هذا الأساس نجد أن الهدف (1) هو تعظيم الإيراد من العملة الصعبة $ وذلك طبقا للدالة التالية:

$G_1(x_1, x_2) = 100x_1 + 50x_2 \rightarrow Max.$

الهدف رقم (2) في هذه الحالة هو تدنية التكاليف إلى أدنى مستوى ويكتب على النحو التالي:

$G_2(x_1, x_2) = 20x_1 + 50x_2 \rightarrow Min.$

ويمكن التعبير عن هذه الدوال بشكل موحد وذلك على النحو التالي:

$$G(x_1,x_2) = \frac{G_1(x_1,x_2)}{G_2(x_1,x_2)} = \frac{100x_1 + 50x_2}{20x_1 + 50x_2} \rightarrow Max.$$

وتفسير هذه الدوال هو أن المطلوب تعظيم الإيرادات المحسوبة بالدولار أو العمل الصعبة التي ترد للمنشأة تقابل كل وحدة واحدة من الكلف المعروفة بالعملة المحلية، علما بأن العلاقة:

$$\frac{G_1(x_1,x_2)}{G_2(x_1,x_2)}$$

لها مفهوم اقتصادي.

إن العلاقات الرياضية التي تدخل في صياغة النموذج الرياضي لهذه المشكلة يمكن التعبير عنها كما يلي:

(1) $2x_1 + x_2 \leq 9000$

(2) $x_1 + x_2 \leq 5500$

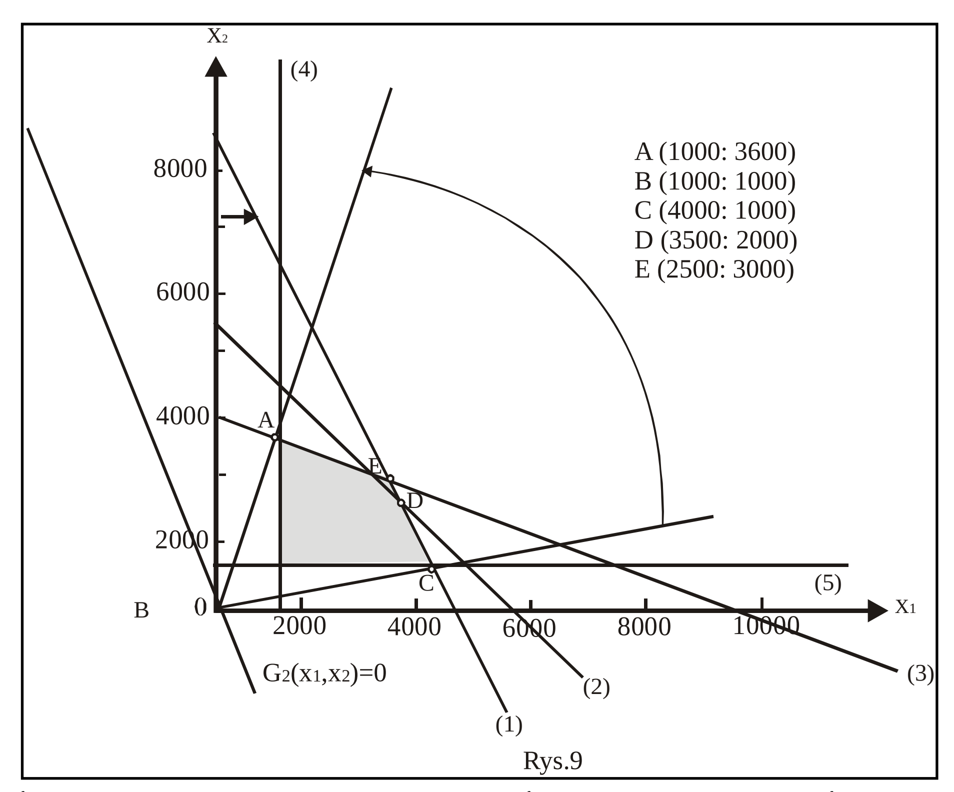
(3) $x_1 + 2.5x_2 \leq 10000$

(4) $x_1 \geq 1000$

(5) $x_2 \geq 1000$

(6) $G(x_1,x_2) = \dfrac{100x_1 + 50x_2}{20x_1 + 50x_2} \rightarrow Max.$

إن القيود من 1-5 الواردة في النموذج الرياضي أعلاه يتم رسمها في الشكل التالي (Rys.9):



Rys.9

على أساس الشكل السابق يتضح أن منطقة الحلول الممكنة (FR) هي: (ABCDE) وأن دالة الهدف:

$$G_2(x_1,x_2) = 0$$

ليس لها علاقة أو تماس مع هذه المنطقة (FR)، وعليه فإن:

$$G_2(x_1, x_2) = 20x_1 + 50x_2 = 0$$

في الخطوة التالية يتم إيجاد النقطة $Po\,(x_1^o, x_2^o)$ التي بموجبها يتم حل العلاقات:

$$G_1(x_1, x_2) = \ , G_2(x_1,x_2) = 0$$

أي أن:

$$100x_1 + 50x_2 = 0$$

$$20x_1 + 50x_2 = 0$$

إن ذلك يؤدي إلى ما يلي:

$$x_1^0 = 0, x_2^0 = 0$$

وبالقرب من النقطة $P_0(0,0)$ يـتم رسـم المسـتقيم (L)، ومـن ذلـك يـتم التعـرف عـلى إحداثيات زوايا الشكل FR وكما يلي:

A (1000,3600) , C (4000, 1000)

وإن قيمة دالة الهدف $G(x_1, x_2)$ في هاتين النقطتين، هي:

$$G(1000, 3600) \approx 1.4$$

$$G(4000, 1000) \approx 3.46$$

وبما أن قيمة الدالة في الحالة الثانية هي أعلى من الحالـة الأولى فـإن الخيـار سـيقع عليها. أي أن الحل لهكذا مشكلة هو:

$$X_1 = 4000$$

$$X_2 = 1000$$

أي إنتاج 4000 وحدة من القماصل النسـائية و 1000 وحـدة مـن القماصـل الرجاليـة، وهذا القرار سيؤدي على أن يحصل هذا المعمل عـلى 3.46 دولار مقابـل كـل 1 دينـار مـن التكاليف بالعملة المحلية (دينار).

مثال رقم ❷

إحدى مشاكل الإنتاج يرتبط بها القيود التالية:

(1) $x_1 + 3x_2 \leq 15$

(2) $x_1 + 3x_2 \leq 9$

(3) $x_1 \geq 1.5$

(4) $x_2 \geq 1.5$

والمطلوب هو:

1- أوجد الحل الأمثل، إذا علمت أن دالة الهدف وهي:

$$G_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 + 6 \rightarrow Max.$$

2- أوجد الحل الأمثل، إذا علمت أن دالة الهدف هي:

$G_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 2 \longrightarrow Min.$

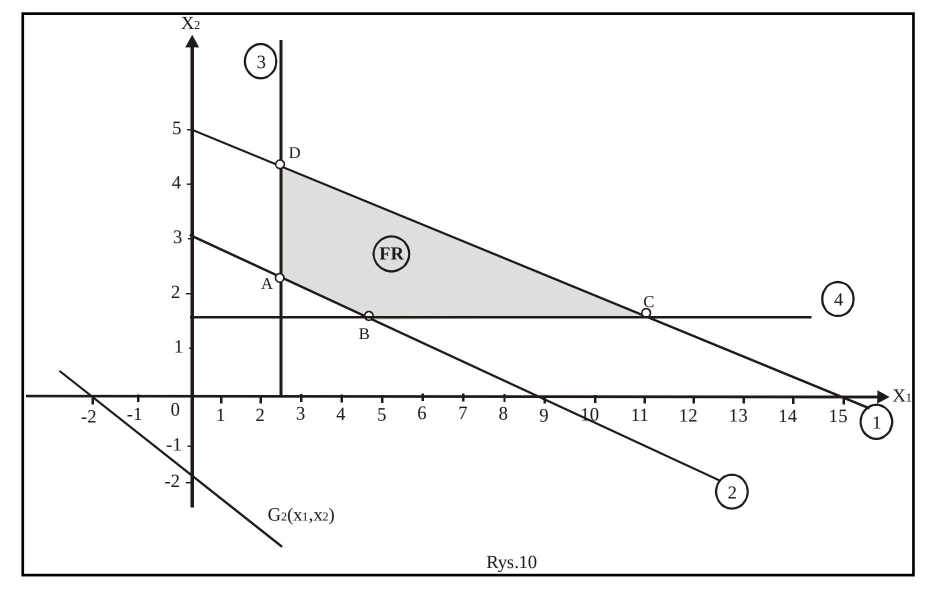
3- أوجد المطلوب إذا كانت الدالة مركبة وكانت كما يلي:

$$G(x_1, x_2) = \frac{G_1(x_1, x_2)}{G_2(x_1, x_2)} = \frac{2x_1 + 4x_2 + 6}{x_1 + x_2 + 2} \rightarrow Max.$$

الحل:

إن حل هذه المشكلة يكون وفق الخطوات التالية:

1- يتم رسم العلاقات الرياضية (4-1) حيث يتم الحصول على الشكل التالي (Rys.10):



Rys.10

1- من الشكل السابق يتضح أن منطقة الحلول الممكنة FR، وأن أعلى قيمة للدالة $G_1(x_1,x_2)$ تقع في النقطة .C، عليه فإن:

$^*x_1 = 10.5$

$^*x_2 = 1.5$

وأن قيمة دالة الهدف المثلى لهذه القيم هي:

$G_1(x_1, x_2) = 33$

2- وبنفس الطريقة يتم التوصل إلى أن أدنى قيمة للدالة $G_2(x_1,x_2)$ تقع في النقطة.A، وعليه فإن:

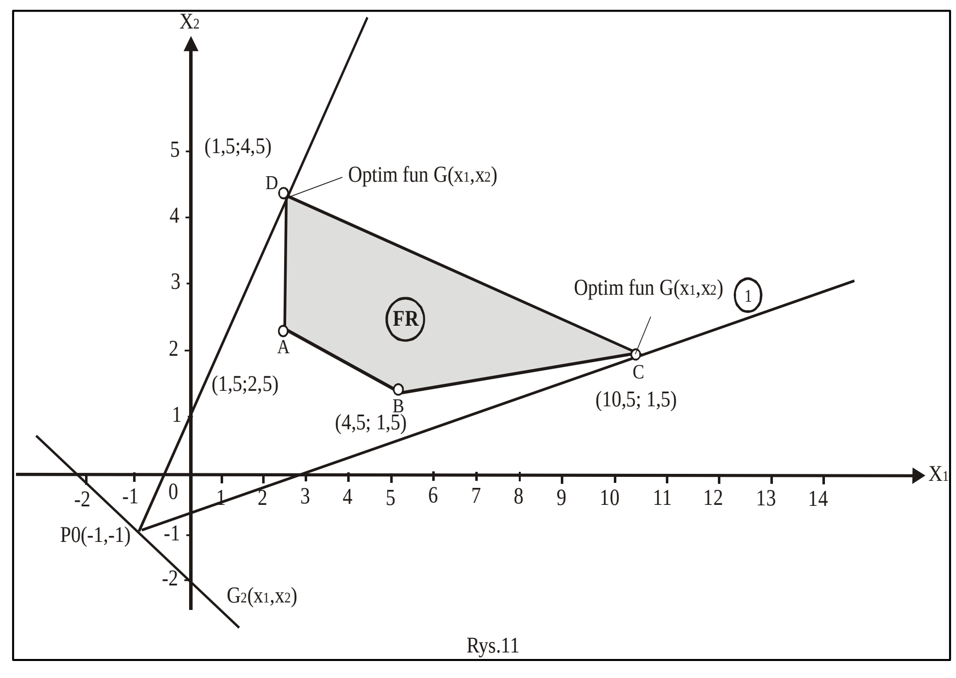
$*x_1 = 1.5$

$x_2 = 2.5$

وأن قيمة دالة الهدف المثلى لهذه القيم هي:

$G_2(x_1, x_2) = 6$

3- من أجل التوصل إلى حل لهذه المشكلة في حالة الدالة المركبة، وأن الدالة $G(x_1,x_2)$ تحقق الشروط الواردة أعلاه، فإن من المفروض التأكد من أن: $G_2(x_1,x_2)$ وليس لها التقاء مشترك مع منطقة الحلول الممكنة، ويتطلب الأرض هذه الحالة رسم الشكل التالي (Rys.11):



Rys.11

من الأشـكال السـابقة (Rys.11 , Rys.9) إن المسـتقيم $G_2(x_1x_2)$ يمتـد في الربـع الثـاني والثالـث والرابع من المحاور الأفقية والعمودية السابقة وليس له أي نقطة التقاء مع الشكل FR.

الخطوة التالية يتم فيها إيجاد $p_0(x_1^0, x_2^0)$ وذلك من خلال حل العلاقات التالية:

$G_1 (x_1,x_2) = 0$

$G_2 (x_1, x_2) =0$

أي أن:

$2x_1 + 4x_2 + 6 = 0$

$x_1 + x_2 + 2 = 0$

ومن حل هاتين المعادلتين، نحصل على ما يلي:

$x_1^0 = -1$

$x_2^0 = -1$

إن رسم مستقيم الحل حول النقطة $p_0(-1, -1)$، فإننا سوف نحصل على النقطتين D,C، فإن قيمة الدالة G في هاتين النقطتين تبلغ:

$$G(1.5 , 4.5) = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$G(10.5 , 1.5) = \frac{33}{14} = 2\frac{5}{14} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وبما أن الدالة الأولى أكبر قيمة من الدالـة الثانيـة، وهـذا يعنـي أن الدالـة تصـل إلى أعلى قيمة لها من النقطة D، أي أن:

$^*x_1 = 1.5$

$^*x_2 = 4.5$

أما الدالة التي تصل إلى أقل قيمة لها فهي $G(x_1,x_2)$ في النقطة C أي أن:

$^*x_1 = 10.5$

$^*x_2 = 1.5$

وباستخدام الطريقة المبسطة يمكن أيضا التوصل إلى الحل الأمثل للمشكلة كـما هـو وارد أعلاه.

3.4.4 حالة تطبيقية لاتخاذ القرار الأمثل على أساس دالة الهدف المزدوجة

ذكرنا سابقا إن في الواقع العملي يواجه متخذ القرار أحيانا مشاكل ذات خصوصية معينة يكون فيها المطلوب تحقيق هدفين متناقضين في آن واحد. ويكون المطلوب هو اتخاذ القرار الأمثل بما يؤدي إلى أن تكون أحد قيم دالة الهدف أعلى ما يمكن والقيمة الأخرى لدالة الهدف أقل ما يمكن: ولو كان الرمز H_1 يمثل أحد قيم دالة الهدف وأن H_2 هو القيمة الأخرى، فإن على متخذ القرار أن يختار المتغيرات الأساسية في إطار النموذج الرياضي بما يؤدي إلى أن تكون قيمة H_1 هي أعلى ما يمكن (Max) وأن قيمة H_2 أقل ما يمكن (Min) وتكون المحصلة النهائية لهذه الدالة المزدوجة هو التعظيم (Max)، أي أن:

$$H = \left.\frac{H_1 \rightarrow Max}{H_2 \rightarrow Min}\right\} \rightarrow Max$$

وقد يكون الأمر معكوسا، أي أن المطلوب هو أن تكون دالة الهدف H1 أقل ما يمكن (Min) وأن دالة الهدف H_2 ينبغي أن تكون أعلى ما يمكن Max فإن المحصلة النهائية لهذه الدالة المزدوجة هو المتغير Min أي أن:

$$H = \left.\frac{H_1 \rightarrow Min}{H_2 \rightarrow Max}\right\} \rightarrow Min$$

إن صيغة النموذج الرياضي الذي على أساسه يجري اتخاذ القرار الأمثل تتضح في المثال أدناه:

مثال رقم ❶

إحدى المنشآت المتخصصة بإنتاج المواد الغذائية، ترغب بطرح نوعين من المنتجات وهما: المنتج رقم (1) والمنتج رقم (2) حصلت هذه المنشأة على التسهيلات

اللازمة لتصدير منتجاتها إلى السوق الخارجية، حيث أن منتجاتها كانت على درجة كافية من الجودة بما يمكنها من دخول المنافسة في السوق الخارجية.

ترغب المنشأة المذكورة في وضع خطة إنتاج خاصة بالمنتج رقم (1) ورقم (2) بالشكل الذي يؤمن لها الحصول على أكبر كمية ممكنة من العملة الصعبة وذلك مع الأخذ بنظر الاعتبار تحقيق أقل التكاليف الإنتاجية الممكنة.

طلب مدير المنشأة من إدارة الإنتاج معالجة هذه المشكلة على أساس البيانات التالية:

جدول (5-4) بيانات المشكلة

التفاصيل المتعلقة باستخدام المستلزمات الأساسية	وحدة القياس	المنتجات		المتوفر في المستلزمات الأساسية
		المنتج رقم (2)	المنتج رقم (1)	
استهلاك المواد للوحدة الواحدة	كيلو غرام	3	2	6
وقت العمل المصروف لإنتاج وحدة واحدة باستخدام A	ساعة/ماكنة	6	3	9
وقت العمل المصروف لإنتاج وحدة واحدة باستخدام الماكنة B	ساعة/ماكنة	4	4	8
كلفة الوحدة الواحدة من المنتوج	دينار	100	80	
سعر التصدير	دولار	3	2	
الحد الأدنى من احتياجات المستورد الأجنبي من الإنتاج	ألف كيلو غرام	0.5	0.5	

الحل:

شكلت لجنة خاصة من إدارة الإنتاج والإدارة المالية لدراسة المشكلة، وقد وضعت اللجنة المذكورة الفرضيات التالية:

x ← حجم الإنتاج بشكل عام

عليه فإن: x_1 ← حجم الإنتاج من المنتج رقم (1)

x_2 ← حجم الإنتاج من المنتج رقم (2)

وبناء على ذلك، فإن كمية المادة المستهلكة لإنتاج كل واحد من المنتجات هي كما يلي:

$3x1 + 2x3$

إن وقت العمل المطلوب لذلك هو:

$6x1 + 3x2$ باستخدام الماكنة A

$4x1 + 4x2$ باستخدام الماكنة B

إن المتوفر من المستلزمات الأساسية للإنتاج محدود، ويعبر عن ذلك كما يلي:

(1) $3x_1 + 2x_2 \leq 6$

(2) $6x_1 + 3x2 \leq 9$

(3) $4x_1 + 4x2 \leq 8$

إن حجم الإنتاج من المنتج الأول (x_1)، وحجم الإنتاج من المنتج الثاني ($x2$) يجب أن لا يقل عن الحد الأدنى لحاجة المستورد الأجنبي، أي:

(4) $x_1 \geq 0.5$

(5) $x_2 \geq 0.5$

إن تكاليف الإنتاج تحسب كما يلي:

(6) $K=100x_1 + 80x_2$

إن العوائد المتوقعة من العملة الصعبة تحسب كالآتي:

(7) $w= 3x_1 + 2x_2$

بناء على ما تقدم فإن دالة الهدف Z تحسب كالآتي:

$$(8) \quad Z = \frac{W}{K} = \frac{3x_1 + 2x_2}{100x_1 + 80x_2}$$

ولما كان البسط W مطلوب تعظيمه، وأن المقام K مطلوب تصغيره، فإن دالة الهدف Z ينبغي أن تصل إلى أعظم قيمة لها.

إن مواصفات الخطة المثلى للإنتاج هي تلك الخطة التي تكون فيها قيم المتغيرات x_1, x_2.

يمكن حل هذه المشكلة باستخدام طريقة السمبلكس ويتطلب ذلك إدخال متغيرات جديدة، وهي y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 وذلك كما يلي:

$$y_1 = -3x_1 - 2x_2 + 36 \geq 0$$

$$y_2 = -6x_1 - 3x_2 + 9 \geq 0$$

$$y_3 = -4x_1 - 4x_2 + 8 \geq 0$$

$$y_4 = x_1 \quad -0.5 \geq 0$$

$$y_5 = x_2 \quad -0.5 \geq 0$$

الحل الذي يتم الحصول عليه لهذه المشكلة هو كما يلي:

$$y_5 = 0, y_5 = 0$$

$$y_1 = \frac{7}{2}, \ y_2 = \frac{9}{2}, \ y_3 = 4, \ x_1 = \frac{1}{2}, \ x_2 = \frac{1}{2}$$

إن قيمة دالة الهدف Z هي:

$$Z = \frac{\frac{5}{2}}{90} = \frac{1}{36}$$

حتى يمكن فهم الدلالات الرياضية لنموذج المشكلة الرياضي الموضح سابقا، وذلك في ضوء النتائج التي تم الحصول عليها، يستدعي الأمر الاعتماد على الرسم البياني. ويتطلب ذلك تحويل المتباينات الرياضية من (1-5) إلى معادلات على افتراض أن (L) هو الرمز لكل معادلة وذلك كما يلي:

L_1 ; $L_3x_1 + 2x_2 = 6$

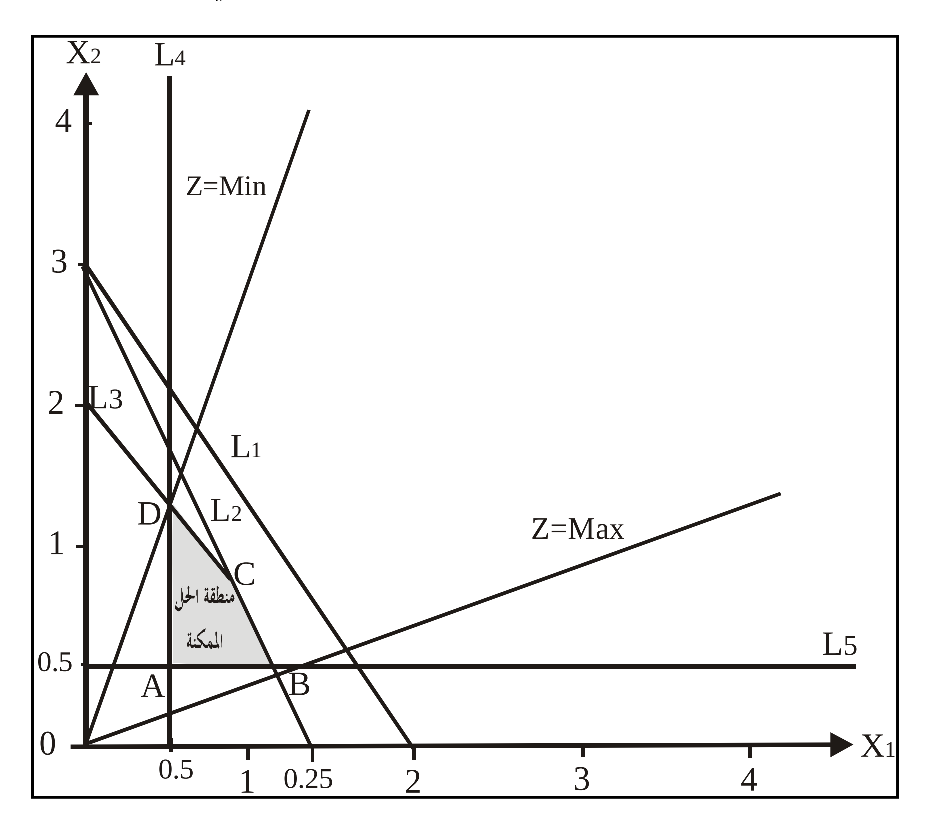
L_2: $6x_1 + 3x_2 = 9$

L_3: $4x_1 + 4x_2 = 8$

L_4: $x_1 = 0.5$

L_5: $x_2 = 0.5$

الشكل البياني الذي تتضح من خلاله هذه المعادلات هو ما يلي:



إن الشكل (ABCD) يمثل المساحة الخاصة بالحلول الممكنة.

إن دالة الهدف Z هي كما مر معنا في العلاقة رقم (8) تساوي:

$$Z = \frac{3x_1 + 2x_2}{100x_1 + 80x_2}$$

بعد ضرب الوسطين في الطرفين نحصل على:

$$Z\,(100x_1 + 80x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

ومنه نحصل على ما يلي:

$$X_2 = \frac{3 - 100Z}{2 - 80Z} x_1$$

إن الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه $\left(x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2} \right)$ في السابق كان السبب في تحديد النقطة A، وهي ليست بالنقطة التي عندها الحل يكون أمثلا. إن الحل الأمثل الذي يتواجد عند النقطة B يمكن التوصل إليه بشكل مباشر من خلال توصيل مستقيم من النقطة إلى المحور x_1، ونترك ذلك للقارئ ليتأكد بنفسه.

مشاكل تطبيقية مختلفة حول دوال

الهدف المركبة

مشكلة رقم (1) **Problem no.(1)**

باستخدام الطريقة البيانية حل المشكلة التالية:

(1) $x_1 + 2x_2 \geq 8,$

(2) $x_1 + x_2 \leq 8,$

(3) $-x_1 + x_2 \leq 1,$

(4) $x_1 - 2x_2 \leq 4,$

(5) $0 \leq x1 \leq 6,$

(6) $x_2 \geq 1,$

(7) $F(x_1, x_2) = \dfrac{-x_1 + x_2 - 8}{x_1 + x_2 + 4} \rightarrow \min.$

النتائج النهائية:

$X_1 = 6$

$X_2 = 1$

مشكلة رقم (2) **Problem no.(2)**

توفر لديك النموذج الرياضي التالي:

(1) $x_1 + x_2 \geq 6,$

(2) $-x_1 + x_2 \leq 3,$

(3) $2x_1 + x_2 \leq 12,$

(4) $x_1 - x_2 \leq 4,$

(5) $H(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 - 2x_2 + 2}{3x_1 - x_2 + 6} \rightarrow \min.$

المطلوب:

1- حل المشكلة باستخدام الطريقة البيانية.

2- ما هي قيمة دالة الهدف المثلى.

النتائج النهائية: 1. $X_1 = 5,\ x_2 = 2$ 2. $H(x_1, x_2) = \frac{8}{19}$

مشكلة رقم (3) **Problem no.(3)**

توفر لديك النموذج الرياضي التالي:

(1) $x_1 - x_2 \leq 0,$

(2) $2x_1 + x_2 \geq 6,$

(3) $x_1 + x_2 \leq 6,$

(4) $x_1 + x_2 \geq 5,$

(5) $x_1, x_2 \geq 0,$

(6) $G(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 + 2x_2 + 3}{2x_1 + x_2 + 4} \rightarrow \min.$

المطلوب:

1- حل المشكلة بطريقة الرسم (الطريقة البيانية)

2- ما هي قيمة الدالة $G(x^*_1, x^*_2)$.

النتائج النهائية: 1. $X_1 = 3,\ x_2 = 3$ 2. $G(x_1, x_2) = \frac{6}{13}$

مشكلة رقم (4)   **Problem no.(4)**

توفر لديك النموذج الرياضي التالي:

(1) $x_1 + x_2 \leq 5,$

(2) $x_1 + x_2 \geq 1,$

(3) $x_1 - 2x_2 \leq 2,$

(4) $x_1 \geq 0,$

(5) $0 \leq x_2 \leq 3,$

(6) $$Z(x_1, x_2) = \frac{3x_1 + 2x_2 + 4}{6x_1 - 4x_2 + 16} \rightarrow \max.$$

النتائج النهائية:

$X_1 = 2$, $X_2 = 3$

مشكلة رقم (5)   **Problem no.(5)**

منشأة إنتاجية ترغب في طرح اثنين من المنتجات باستخدام اثنين من وسائل الإنتـاج وهي:

I ⇐ متوفر منها 8000000 وحدة.

II ⇐ متوفر منها 5000000 وحدة.

البيانات المتعلقة باستهلاك هذه الوسائل لكل منتوج هو كما يلي:

وسائل الإنتاج	استهلاك وسائل الإنتاج لكل منتوج	
	C	D
I.	1	4
II.	1	1

المنشأة استلمت طلبية للحصول على 2 مليون من المنتوج C، وأن تكاليف إنتاج المنتج C هو 8 والمنتج D هو 12 دينار، وقد علمت أن الربح المتوقع من المنتج C هو 2 دينار والمنتج D هو 4 دينار ما هو الحل لهكذا مشكلة.

النتائج النهائية:

$X_1 = 2000000$

$X_2 = 1500000$

مشكلة رقم (6)   **Problem no.(6)**

إحدى المؤسسات الصناعية الكبيرة التي تخصصت بالصناعات الحديدية لأغراض التصدير، قامت بطرح نوعين من المنتجات الحديدية (Z_2,Z_1) .

البيانات المتعلقة بعملية الإنتاج موضحة بالجدول التالي:

المواد الأولية ومستلزمات الإنتاج	وحدة القياس	الحديد		المتوفر من المواد
		Z_1	Z_2	
استهلاك مستلزمات الإنتاج لكل t1	t	2	1.5	1200000
مقدار العمل المطلوب لكل t1	h	60	90	54000000
استهلاك المواد المختلفة	t	0.3	0.3	270000
تكاليف إنتاج t1 حديد	zt	10000	15000	
سعر تصدير t1 حديد	dolar	25000	50000	
المتطلبات الدنيا	t	150000	200000	
المتطلبات القصوى	t	700000	70000	

وقد علمت ما يلي:

يمكن أن تحصل المؤسسة على العملة الصعبة ($) من تصدير الحديد فيما لو قامت بتخفيض الكلفة الخاصة بالإنتاج.

المطلوب:

ما هو أقصى ما يمكن أن تحصل عليه المؤسسة من العملة الصعبة محسوبا لكل 1 دينار من التكاليف الخاصة بالإنتاج في ظل الحل الأمثل.

النتائج النهائية:

$X_1 = 1500\ 000$

$X_2 = 5000\ 000$

وأن لكل 1 دينار من الكلف الخاصة بالإنتاج يتم الحصول على 0.319 دولار

مشكلة رقم (7) **Problem no.(7)**

لطرح نوعين من المنتجات يتم استهلاك مقادير مختلفة من مستلزمات الإنتاج كما هو واضح في الجدول التالي:

المواد الأولية ومستلزمات الإنتاج	المنتجات I	المنتجات II	مقدار ما هو متوفر
مواد أولية	3	1	12000 jedn
مكائن ومعدات	1	3	12000 jedn
عمل	1	1	5000 jedn
سعر التصدير	400	200	
تكاليف وحدة الإنتاج	600	400	

وقد علمت وقد علمت أن المنشأة تسلمت طلبية لإنتاج 1500 وحدة من المنتج (I) والمنتج (II.).

المطلوب:

ما هي كمية ونوعية الإنتاج على أساس اعتماد مؤشر تعظيم مقدار العملة الصعبة بالدولار التي يتم الحصول عليها مقابل أقل مقدار ممكن من التكاليف محسوبة بالدينار وما هي حصة الدينار الواحد من العملة الصعبة.

النتائج النهائية:

$X_1 = 3500$

$X_2 = 1500$

وأن لكل 1 دينار من الكلف الخاصة يمكن أن يلحق المنشأة إيراد من العملة الصعبة $ بمقدار 0.63

مشكلة رقم (8) **Problem no.(8)**

لو توفرت لديك نفس البيانات الواردة في المثال رقم (2) ما عدا كلفة الوحدة الواحدة وبذلك فإن بيانات المشكلة هي كما في الجدول التالي:

المواد الأولية ومستلزمات الإنتاج	وحدات القياس	I	II	مقدار المتوفر من المواد الأولية
المواد المطلوبة لكل وحدة واحدة من المنتوج	KG	3	2	6
العمل المطلوب على الماكنة A لكل وحدة واحدة	ساعة/ماكنة	6	3	9
العمل المطلوب على الماكنة B لكل وحدة	ساعة/ماكنة	4	4	8
تكاليف الإنتاج	دينار	10	8	
سعر التصدير	Dolar	12	8	
أقل مقدار يمكن أن يحتاج إليه المستلم للبضاعة	Tys.kg	0.5	0.5	

المطلوب:

صياغة خطة لإنتاج (II,I) بما يؤمن أعلى مقدار ممكن من العملة الصعبة في أقل مقدار ممكن من التكاليف.

النتائج النهائية:

$X_1 = 1250$

$X_2 = 500$

$F(x_1,x_2) = 0.000115$

مشكلة رقم (9) **Problem no.(9)**

إحدى المشاكل الإنتاجية، تحكمها القيود التالية:

(1) $-x_1 + x_2 \leq 1,$

(2) $x_1 + 2x_2 \geq 5,$

(3) $0 \leq x_1 \leq 3,$

(4) $x_2 \geq 0$

أوجد الحل الأمثل إذا علمت أن دالة الهدف يمكن أن تكون وفق الصيغ التالية:

a. $x_1 + x_2 \rightarrow$ Max.

b. $x_1 - 4x_2 \rightarrow$ Min.

c. $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 - 4x_2} \rightarrow$ Max.

d. $\dfrac{x_1 - 4x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow$ Min.

النتائج النهائية:

a) $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

b) $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

c) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

d) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

مشكلة رقم (10)　　　Problem no.(10)

توفر لديك النموذج الرياضي التالي:

(1) $x_1 + x_2 \leq 2$

(2) $-x_1 + x_2 \leq 5$

(3) $x_1 + x_2 \geq 4$

(4) $x_1 + x_2 \leq 8$

(5) $x_1 + x_2 \leq 0$

(6) $H(x_1, x_2) = \dfrac{\alpha x_1 - x_2 + 3}{x_1 + x_2 + 1} \rightarrow Max.$

المطلوب:

1- ما هي قيمة المعامل α ، بحيث أن: P0(3,-4) .

2- أوجد الحل الأمثل يأخذ بنظر الاعتبار ما ورد في النقطة (1).

3- ما هي قيمة المعامل α بحيث أن: P0(-4,3)

4- أوجد الحل الأمثل الذي يأخذ بنظر الاعتبار ما ورد في النقط (3).

النتائج النهائية:

1. $\alpha = -\dfrac{7}{3}$

2. $x_1 = 1$　　$x_2 = 3$　　$H(x_1,x_2) = -\dfrac{7}{15}$

3. $\alpha = 0$

4. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$　　$H(x_1, x_2) = \dfrac{2}{3}$

أسئلة وتمارين الفصل الرابع



س1: ما هو مفهوم البرمجة بأعداد صحيحة.

س2: ما هو الفرق بين البرمجة بأعداد صحيحة والبرمجة الخطية.

س3: ما هي الحالات البرمجة بأعداد صحيحة، وضح ذلك مع ذكر النموذج الرياضي لكل حالة.

س4: وضح على أساس المثال التالي الفرق بين منطقة الحلول الممكنة في حالة البرمجة بأعداد صحيحة والبرمجة الخطية مع التركيز على نقطة الحل الأمثل:

$4x_1 + 3x_2 \leq 12$

$6x_1 + 8x_2 \leq 24$

$Z=14x1 + 16x_2 \rightarrow Max.$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1, x_2 \Rightarrow$ An- Integer أعداد صحيحة

س5: ما هي الأساليب التي بموجبها يمكن معالجة الحالات الشاذة وما هي فكرة كل حالة.

س6: توفرت لديك النتائج التالية:

$X_1 = 6.4$

$X_2 = 6245341.7$

$X_3 = 2.6$

$X_4 = 5234514.3$

$X_5 = 8.3$

كيف يتم التعامل مع هكذا نتائج، كي يتم تحويلها إلى أعداد صحيحة.

س7: عدد أهم الحالات الخاصة في البرمجة الخطية.

س8: ما هو المقصود بالحلول المنحلة.

س9: ما هو المقصود بعدم وجود حلول مقبولة.

س10: هل هناك مواصفات معينة لمنطقة الحلول FR؟

س11: توفر لديك النموذج الرياضي التالي:

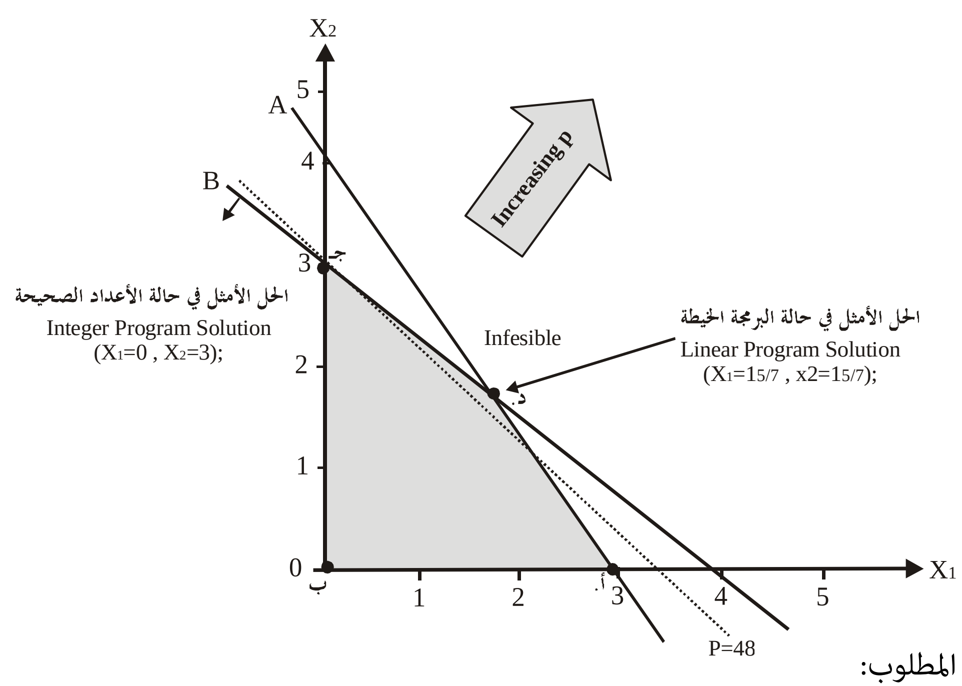
$4x_1 + 3x_2 \leq 12$

$6x_1 + 8x_2 \leq 27$

$Z= 14x_1 + 16x_2 \rightarrow$ Max.

$x_1 ,\ x_2 \geq 0$

$x_1 , x_2 \Rightarrow$ An Integer



المطلوب:

1- ما هي عدد الحلول الممكنة في حالة البرمجة الخطية وفي حالة الأعداد الصحيحة .

2- ما هي إحداثيات النقاط في حالة الحل الأفضل لكلا الحالتين.

س12: حل النماذج الرياضية التالية بطريقة التفريغ والتحديد:

أولا:

$2x_1 + 4x_2 \leq 25$

$x_1 \leq 8$

$x_2 \leq 5$

$Z = 31x_1 + 60x_2 \rightarrow$ Max.

$x_1 , x_2 \geq 0$

$x_1, x_2 \Rightarrow$ An-Integer.

ثانيا:

$3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_2 \leq 2$

$Z = x_1 + x_2 \rightarrow$ Max.

$x_1 , x_2 \geq 0$

$x_1, x_2 \Rightarrow$ An-Integer.

س13: ما هي الأهداف وراء استخدام أسلوب البرمجة الخطية في ظل دالة الهدف المركبة.

س14: ما هو الفرق بين نموذج البرمجة الخطية ونموذج البرمجة الخطية في ظل دالة الهدف المركبة.

س15: وضح بعض الأمثلة في الواقع العملي التي يمكن أن تطبق عليها هكذا نوع من النماذج الرياضية.

س16: في أحد الحالات التطبيقية، وجد أن دالة الهدف هي كما يلي:

$$\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = \frac{x_1 + x_2 + 2}{12x_1 + 3x_2 + 15} \rightarrow \text{Max.}$$

المطلوب هو التحقق من ما يلي:

لو تم تغيير دالة الهدف إلى الصيغة التالية:

$$\frac{G_2(x)}{G_1(x)} = \frac{12x_1 + 3x_2 + 15}{x_1 + x_2 + 2} \rightarrow \text{Min.}$$

هل يؤدي ذلك إلى تغيير نقاط منطقة الحلول وكذلك النقطة $p_0(x_1^*, x_2^*)$

س17: إذا علمت أن النقاط التالية تمثل حدود منطقة الحلول الممكنة،

A(2,2) , B(5,1) , C(4,4) , D(1,5)

وأن: P_0 (-1,-1)

في أي نقطة من النقاط أعلاه يمكن أن يكون الحل الأمثل؟

الفصل الخامس

تحليل حساسية النموذج الرياضي

1.5 مفهوم تحليل الحساسية

2.5 حالات تحليل الحساسيـــة

3.5 أمثلة وتطبيقات مختلفة في ترشيد خطط الإنتاج

أسئلة وتمارين الفصل الخامس

الفصل الخامس

تحليل حساسية النموذج الرياضي

من أجل توضيح مفهوم وفكرة تحليل حساسية النموذج الرياضي، سوف نتطرق في البداية إلى توضيح مفهوم تحليل الحساسية وذلك كما سيرد أدناه.

1.5 مفهوم تحليل الحساسية

يعتبر تحليل الحساسية من الأساليب الكمية التي ترد ضمن المنهج الكمي لدراسة إدارة الأعمال، حيث تظهر الحاجة لهذا الأسلوب في ترشيد القرارات الإدارية في المنشآت أو المنظمات الاقتصادية المختلفة. تبدأ الحاجة إلى تطبيق هذا الأسلوب بعد الانتهاء من عملية حل المشكلة واستخراج النتائج النهائية وبالتحديد الحصول على الحل الأمثل المستهدف للمشكلة، ولذلك يسمى هذا الأسلوب أيضاً بـ (Post Optimality Solution) أي الحل ما بعد الأمثلية. يعرف أسلوب تحليل الحساسية بأنه عملية قياس لمدى أو حدود التغيير في قيم أو مكونات النموذج الرياضي مع بقاء الحل الأمثل الذي تم التوصل إليه دون تغيير. في حين يرى البعض أن الاهتمام ينصب بالدرجة الأساس على قياس مدى تحسس الحل الأمثل الذي تم التوصل إليه، لأي تغيير في مكونات النموذج الرياضي، ويقصد بالتغيير هنا عملية زيادة أو نقصان أي جزء أو مفردة من مفردات النموذج الرياضي. وذلك من أجل قياس أثر ذلك التغيير على الحل الأمثل الذي تم التوصل إليه.

إن تحليل الحساسية كأسلوب كمي يذهب البعض من المختصين في مجال التحليلات الكمية إلى تسميته بأسلوب تحليل مختبري يهتم، من حيث المضمون بعناصر ومفردات النموذج الرياضي الذي يعبر عن طبيعة المشكلة. وتأسيساً على ما تقدم،

وبقدر تعلق الأمر بخطة الإنتاج، فإن من المفروض أن تعرض هذه الخطة على وحدة خاصة (وحدة تعلم المعلومات الإدارية، مركز الحاسبة الإلكترونية،...الخ) تعد بمثابة مختبر تحليل كمي يتم التعرف فيه على مدى صلاحية هذه الخطة من حيث مدى وكفاءة استغلال ما هو متوفر من مستلزمات الإنتاج الأساسية، الداخلة في صلب العملية الإنتاجية، إضافة إلى التعرف على حجم الأرباح الكلية المتوقعة مع بيان المديات العليا والدنيا التي يمكن أن تصل إليها هذه الأرباح في حالة تغير ما هو متوفر من مستلزمات الإنتاج الأساسية. كما يتم الحصول على تحليلات أخرى سوف يرد تفصيلها ضمن الحالات أدناه.

2.5 حالات تحليل الحساسية

إن توضيح حالات تحليل الحساسية، يتطلب في البداية بيان القاعدة الرياضية الأساسية التي بموجبها يتم توضيح الحالات المذكورة. والمقصود بالقاعدة هنا هو النموذج الرياضي للبرمجة الخطية. ومن المعلوم أن لهذا النموذج ثلاثة صيغ رياضية، وهي:

1- الصيغة الرياضية العامة للبرمجة الخطية

General Form of Linear Programming

2- الصيغة الرياضية القانونية للبرمجة الخطية

Canonical Form of linear Programming

3- الصيغة الرياضية القياسية للبرمجة الخطية

Standard Form of Linear Programming

وفي مجال دراستنا هذه سوف يتم الاعتماد على الصيغة العامة للبرمجة الخطية، حيث إن النموذج الرياضي التفصيلي والمختص لهذه الصيغة، يمكن توضيحها على النحو التالي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_1nxn \quad \leq, =, \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{21}nxn \quad \leq, =, \geq b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$am_1x_1 + am_2x_2 + \ldots + amnxn \leq, =, \geq bm$$

$$Z = c_1 x_1 + c_2x_2 + \ldots + cnxn \rightarrow \text{Max. or Min.}$$

$$x_1, x_2, \ldots xn \geq 0$$

الصيغة المختصرة لهذا النموذج هي كما يلي:

$$\sum_{j=1}^{n} aij\, xj \leq, =, \geq bi \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} cj\, xj \rightarrow \quad \text{Max. or Min.}$$

$$xj \geq 0 \ (j = 1,2,\ldots,n)$$

إن حالات تحليل الحساسية هي عبارة عن مجموعة من التغيرات التي يتم إجراءها في مكونات النموذج الرياضي السابق لمعرفة مدى التغير الذي يحصل على الحل الأمثل، وهذه الحالات هي:

1- التغير في معاملات المتغيرات في القيود الأساسية.
2- التغير في القيم الحرة (R.H.S).
3- التغير في معاملات المتغيرات في دالة الهدف.
4- التغير في عدد متغيرات النموذج الرياضي (للمشكلة).
5- التغير في عدد قيود النموذج الرياضي (للمشكلة).

من أجل توضيح هذه الحالات الخمس نفرض أن مقدار التغيير هو $(\pm\delta)$ وهذا يعني أن أياً من التغيرات السابقة يمكن أن يحصل فيها تغير بمقدار زائد δ أو ناقص δ

علماً بأن (δ) هو أي قيمة لها معنى معين بالنسبة للمشكلة[1]. وفيما يلي توضيح للحالات السابقة والتغيرات التي تحصل فيها:

أولاً: التغيير في معاملات المتغيرات في القيود الأساسية

إن معاملات المتغيرات في القيود يرمز له [A] علماً بأن هذا الرمز يمكن تعريفه من خلال الصفوف والأعمدة وبالتحديد من خلال الرمز (aij)، ويعبر هذا الرمز عن مصفوفة تمثل في حقيقة الأمر مقدار مستلزمات الإنتاج الأساسية الداخلة في صناعة المنتجات، ويمكن بيان ذلك كما يلي:

حيث أن:

$$[A] \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_1n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ am_1 & am_2 & \cdots & amn \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (i = 1,2,\ldots,m) \\ (j = 1,2,\ldots,n) \end{matrix}$$

وعند إدخال التغير $\pm\delta$ على هذا الرمز فإنه يصبح على النحو التالي:

$$\boxed{aij \pm \delta}$$

حيث يعني ذلك أن التغير بمقدار ($\pm\delta$) يمكن أن يطال أي عنصر من العناصر الداخلة في مصفوفة المعاملات أعلاه سواء كان ذلك بالزيادة أو بالنقصان.

ثانياً: التغير في القيم الحرة (R.H.S)

يقصد بالقيم الحرة تلك القيم الواقعة إلى اليمين من العلاقات الرياضية السابقة وتعبر عن ما هو متوفر أو متاح من الموارد المختلفة التي تستخدم في عملية الإنتاج.

---

(1) يمكن أن يرد في هذا الصدد رموز لاتينية أخرى مثل λ، α ...الخ. بحيث كل رمز يرتبط بنوع معين من التغير، حيث على سبيل المثال، التغير في الربح يرمز له λ، والتغيير في مقدار المتوفر من المواد الأولية يرمز له α وهكذا.

تسمى هذه القيم (R.H.S) وتعني (Right Hand Saide) ويتم التعبير عنها من خلال الرمز [B] ولكون هذه القيمة عبارة عن عمود أو متجه لذلك يمكن التعبير عن هذه القيمة بشكل أدق من خلال الرمز (bi). حيث يمكن أن يكتب هذا المتجه كما يلي:

حيث أن:

$$[B] \Rightarrow bi = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ bm \end{bmatrix} \qquad (i = 1,2,...,m)$$

إن التغير الذي يعبر عنه بالرمز $(\pm\delta)$ يمكن أن يقع على أي قيمة من القيم الواردة في العمود المذكور اعتباراً من القيمة b1 ولغاية القيمة bm سواء كان ذلك بالزيادة أو بالنقصان، ويمكن أن يعبر عن ذلك أيضاً كما يلي:

$$Bi = bi \mp \delta$$

ثالثاً: التغير في معاملات المتغيرات في دالة الهدف

من المعروف أن معاملات المتغيرات في دالة الهدف هي أما أن تكون أرباح أو إيرادات أو أسعار والمطلوب تعظيمها إلى أكبر ما يمكن (Max.z) أو هي تكاليف أو خسائر أو نفقات مطلوب تصغيرها أو تدنيتها إلى أقل مستوى ممكن (Min.z). إن التغير في معاملات المتغيرات يمكن أن يكون في ثلاث صيغ، وهي:

1- التغير في معاملات المتغيرات الأساسية Basic Variables
2- التغير في معاملات المتغيرات غير الأساسية Non-Basic Variables
3- التغير في معاملات المتغيرات الأساسية وغير الأساسية.

علما بأن:

قيم المتغيرات الأساسية $xj > 0$

قيم المتغيرات غير الأساسية $xj=0$

وإذا أخذنا بنظر الاعتبار أن مقدار التغير هو $\pm\delta$، فإن التعبير عن ذلك رياضـياً، هـو كما يلي:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} (cj \mp \delta)\, xj \rightarrow \text{Max. or Min.}$$

حيث أن:

Cj في هذه الحالة عبارة عن صف من المعاملات يمكن التعبير عنه كما يلي:

$$[C] \Longrightarrow Cj = [c_1, c_2, \ldots, cn]$$

ويمكن أن يعبر عن ذلك أيضاً كما يلي: $c'j = cj \mp \delta$

حيث أن: cj' هي القيمة المعدلة

رابعاً: التغير في عدد متغيرات النموذج الرياضي (المشكلة)

إن المتغـيرات في النمـوذج الريـاضي هـي (Xj) تعـبر عـن القيمـة المجهولـة المطلـوب حساب قيمها كجزء من عملية حل المشكلة. إن هذه المتغيرات يـتم التعبـير عنهـا بشـكل عام من خلال الرمز [x]. وبما أن عدد هذه المتغيرات هو (j) وهو عبارة عـن متجـه أفقـي، لذلك فإن:

$$[X] \Longrightarrow xj = [x_1, x_2 \ldots xn]$$

حيث أن:

$$[j=1,2,\ldots,n]$$

وأن التغير يحدث في العدد الكلي أو النهائي لما هو موجود من متغيرات في النمـوذج الرياضي سواء كان ذلك بالزيادة أو بالنقصان. ومن الجدير بالذكر أنه بالإمكان التعبير عن العلاقة أعلاه كما يلي:

$$x'j = xj \mp \delta$$

حيث أن: xj' هي القيمة المعدلة.

خامساً: التغير في عدد قيود النموذج الرياضي (المشكلة)

من المعروف أن النموذج الرياضي يتكون من عدد من القيود أو الشروط المحددة له وبالتحديد المحددة لدالة الهدف، والقيود في هذه الحالة يمكن أن تكون على عدة أنواع، أهمها ما يلي[1]:

1- قيود فنية.
2- قيود طاقة.
3- قيود مواد أولية.
4- قيود مالية.
5- قيود إدارية وخدمية وما إلى ذلك.

ولما كان عدد القيود يمكن أن يصل إلى (m) حيث أن:

$(i= 1,2,\ldots,)$

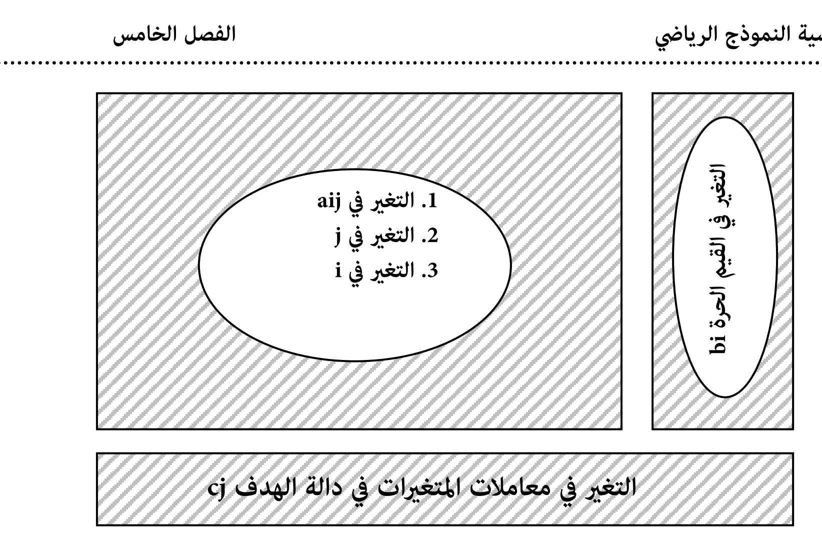
لذلك فإن التغيير في عدد القيود يمكن أن يعبر عنه كما يلي:

$$i \Rightarrow 1,2,\ldots,m \mp \delta$$

أي أن التغير يمكن أن يحدث في العدد الكلي أو النهائي لما هو موجود من قيود داخلة في تركيب وصياغة النموذج الرياضي سواء كان ذلك بالزيادة أو بالنقصان.

إن مواقع التغيرات في النموذج الرياضي يمكن توضيحها من خلال الشكل التالي.

(1) توجد تقسيمات وتصنيفات مختلفة للقيود، ويعود السبب الأساسي في هذا الاختلاف إلى طبيعة المشكلة. راجع الفصل الأول من كتابنا هذا، فقرة مشاكل تخطيط الإنتاج.



معادلة دالة الهدف

لتوضيح فكرة أسلوب تحليل الحساسية وطبيعة هذا التحليلات وأهميتها في ترشيد القرار الإداري، نعتمد في أدناه على أحد الأمثلة المستمدة في الواقع العملي، حيث سوف يتم اعتماد بعض حالات التحليل وأكثرها شيوعاً وأهمية، وبالتحديد تلك التي ترتبط بالعامل aij والقيمة bi.

حيث بالعودة إلى نفس المثال الوارد في الفقرة السابقة والذي كان النموذج الرياضي فيه، كما يلي:

$$F = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow Max.$$

$$2x_1 + x_2 \leq 1000$$

$$3x_1 + x_2 \leq 2400$$

$$1.5x_1 \leq 600$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

إن النتائج النهائية التي تم الحصول عليها من حل هذه المشكلة تظهر من خلال الجدول الذي سبق تقديمه في الفقرات السابقة، وعلى أساس المرحلة الأخيرة من جدول السمبلكس يمكن أن تطرح تساؤلات كثيرة نختار منها ما يلي:

ما هي حدود التغير في سعر كل واحدة من المنتجات مع الحفاظ على أمثلية الحل الذي يتم التوصل إليه.

هل يمكن أن يحصل تغيير في الحل الأمثل، وفي أي من النتائج النهائية فيما لو تم إجراء تغير في مقدار المتوفر من المواد الأولية.

إن هاتين الحالتين في التغير سوف يتم اعتمادهما بشكل أكثر وضوح على أساس بيانات المثال الوارد ذكره أعلاه، وذلك كما يلي:

أولاً: على افتراض أن التغير حصل في سعر المنتج الأول (C_1).

ثانياً: تم زيادة المتوفر من إعادة الأولية S_1 إلى 1200 وحدة

تم تخفيض المتوفر من المادة الأولية S_2 إلى 2100 وحدة ما هو آثر ذلك على الحل الأمثل.

الحل:

إن عملية الحل تتم على أساس أخذ كل تغيير على انفراد، لذلك فإن في البداية سوف نبدأ بالسعر.

أولاً: نفرض أن التغير حصل في سعر المنتج الأول (حيث أن $C_1=30$) ولو تم البدء بدراسة النوع من التغيير، فإن التعبير عن ذلك رياضياً هو: $c'j = cj \mp \delta j$ حيث أن c'_j هو السعر المعدل، إن هذا التعديل سوف يلحق بالمنتج الأول والذي تم التعبير عنه من خلال الرمز W_1 ويظهر أثر هذا التغيير في المرحلة الأخيرة من جدول السمبلكس كما يلي:

المرحلة الأخيرة من جدول السمبلكس وفيه التغيير المقترح في الحل الأمثل $cj \mp \delta j$

CB	Cj	$30+\delta_1$	20	0	0	0	
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
20	X_1	0	1	-1	$\frac{2}{3}$	0	600
0	X_5	0	0	-1.5	0.5	1	300
$30+\delta_1$	X_1	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	200
	Zj	$30+\delta_1$	20	$10+\delta_1$	$\frac{10}{3}-\frac{1}{3}\delta_1$	0	18000
	ci-zj	0	0	$-10-\delta_1$	$-\frac{10}{3}+\frac{1}{3}\delta_1$	0	

في حالة تعظيم (F) فإن القيم في المرحلة الأخيرة من جدول السمبلكس من المفروض أن تكون سالبة أو أصفار $[(cj-zj)\leq 0]$، لذلك فإن النتائج النهائية للعلاقات الواردة في عمـود المتغيرات الراكدة (x_3,x_4) يفترض أن تكون سالبة، أي أن:

(1)……………..… $-10-\delta_1 \leq 0$

(2)……………… $\frac{10}{3}+\frac{1}{3}\delta_1 \leq 0$

في العلاقات الرياضية رقم 1، رقم2 نحصل على ما يلي:

$\delta_1 \geq -10$

$\delta_1 \leq +10$

أي أن حدود التي تقع بين $(-10 \leq \delta_1 \leq +10)$ وبذلك فإن التغيير الـذي سـوف يقـع في C_1 هو كما يلي:

$\therefore C_1 \Leftarrow 30$

فإن:

$C_1 - 10 = 30 - 10 = 20$

$C_1 + 10 = 30 + 10 = 40$

وهذا يعني أن الحل الأمثل الذي تم الحصول عليه في المثال السابق لـن يتغـير فـيما لو كان سعر المنتج الأول w_1 قد بقي ضمن الحدود المشار إليها أدناه، وهي:

40 الحد الأعلى

C_1

20 الحد الأدنى

ومن الجدير بالذكر هنـا أن عـدم التغـير في الحـل الأمثـل يقصـد بـه كميـة الإنتـاج X_2^*, X_1^*. فيما أن دالة الهدف سوف تتغير بمقدار $\delta_1 X_1^*$ ، أي بمقدار التغير الـذي حصـل في سعر المنتج الأول[1].

وبنفس الطريقة يمكن التعبير عن الحالة فيما لو تم التغيير في سعر بيع المنتج الثاني w_2، حيث أن:

$$'C_2 = C_2 \mp \delta_2$$
$$'C_2 = 20 \mp \delta_2$$

ويمكن توضيح ذلك من خلال الجدول التالي:

CB	Cj	$30+\delta_1$	20	0	0	0	
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
$20+\delta_2$	X_2	0	1	-1	$\frac{2}{3}$	0	600
0	X_5	0	0	-1.5	0.5	1	300
30	X_1	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	200
	Zj	30	$20+\delta_2$	$10-\delta_2$	$\frac{10}{3}+\frac{2}{3}\delta_2$	0	18000
	ci-zj	0	0	$-10+\delta_2$	$-\frac{10}{3}-\frac{1}{3}\delta_2$	0	

(1) تشير النجمة (*) إلى أن هذه الرمز أو هذه القيمة تعبر عن الحل الأمثل.

ويمكن حساب قيمة δ_2، يتطلب الأمر ذلك الرجوع إلى العلاقات الرياضية التالية:

(3)………………….. $-10+\delta_2 \leq 0$

(4)……………….. $-\frac{10}{3}-\frac{2}{3}\delta_2 \leq 0$

من العلاقات الرياضية السابقة نحصل على ما يلي:

$\delta_2 \leq +10$

$\delta_2 \leq -5$

أي أن حدود قيم δ_2 هي $(-5 \geq \delta_2 \leq 10)$، وبذلك التغيير الـذي سـوف يقـع في C_2 هـو كما يلي:

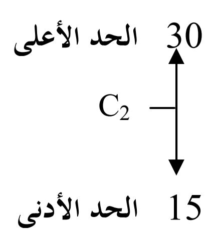
$\therefore C_2 \Leftarrow 20$

فإن:

$C_2 + 10 = 20 + 10 = 30$

$C_2 - 5 = 20 - 5 = 15$

وهذا يعني أن الحل الأمثل لن يتغير لو أن سعر المنتج الثاني W_2 بقي ضمن الحـدود المشار إليها، وهي:



والتغيير كما ذكرنا سابقاً سوف يحصل فقط في قيمة دالة الهدف، حيـث أن: $\delta^2 X_2^*$ ولن يحصل تغيير في كمية ونوعية الإنتاج.

ثانياً: بالنسبة للحالة الثانية التي تتعلق بالقيم الحرة (bi)

نفرض أن:

α_1 = مقدار التغيير في المتوفر من المادة الأولية S_1

α_2= مقدار التغيير في المتوفر من المادة الأولية S_2

وعليه فإن التغيير في القيم الحرة يمكن أن يعبر عنه كما يلي:

$$bi = bi \mp \alpha i$$

ومن الجدير بالذكر هنا أن التغيير في الحل الأمثل سوف يطرأ على قيمة المتغيرات الأساسية $(x_1, x_2, \ldots)$.

ومن أجل البدء بعملية الاختبار والفحص، ننطلق من مبدأ مهم وهو أن قيم المتغيرات الأساسية X_B ينبغي أن يكون لها قيم موجبة أي أن:

$$*X_B = B^{-1} b^* i \geq 0$$

وبالعودة إلى العلاقة الرياضية السابقة ($bi' = bi \mp \alpha i$) ولو فرضنا أن التغيير وقع في القيد الأول وبالتحديد في القيمة الحرة التي تمثل مقدار المتوفر من المواد الأولية الأولى (b_1)، فإن عمود القيم الحرة المعدل bi' يصبح كما يلي:

$$\overline{b}i = \begin{bmatrix} 1000 \mp \alpha_1 \\ 2400 \\ 600 \end{bmatrix}$$

حيث أن: (i=1)

ولو تم ضرب المصفوفة B^{-1} (التي سبق أن تم تحديدها في الفقرات السابقة) بالمقدار bi' نحصل على ما يلي:

$$B^{-1}\overline{b}i = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 + \alpha_1 \\ 2400 \\ 600 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\bar{b}i = \begin{bmatrix} -1000 - \alpha_1 + 1600 \\ 1500 - 1.5\alpha_1 + 1200 + 600 \\ 1000 + \alpha_1 - 800 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\bar{b}i = \begin{bmatrix} 600 - \alpha_1 \\ 300 - 1.5\alpha_1 \\ 200 + \alpha_1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث أن: (i=1)

مما تقدم نستنتج أن α_1 ينبغي أن يحقق العلاقات الرياضية التالية:

(1)........................ $600 - \alpha_1 \geq 0$

(2)........................ $300 - 1.5\alpha_1 \geq 0$

(3)........................ $200 - \alpha_1 \geq 0$

وبعد التبسيط للعلاقات أعلاه يكون لدينا ما يلي:

(1)........................ $\alpha_1 \geq -600$

$\alpha_1 \geq 600$

(2)........................ $-1.5\alpha_1 \geq -300$

$\alpha_1 \geq 200$

(3)........................ $\alpha_1 \geq -200$

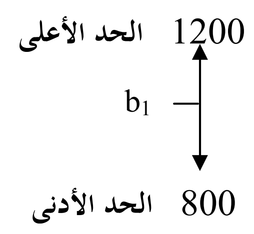
من القيم السابقة يتضح أن من القيم ($\alpha 1 = 200$, $\alpha 1 = 600$) يفضل أن تعتمد الأمثـل لكونها الأقرب إلى عملية التغيير، لذلك فإن حدود التغيير سوف تكون هي:

$-200 \leq \alpha_1 \geq +200$

وعلى هذا الأساس فإن التغيير الذي سيطرأ على قيمة b1 هو:

$$1000 + \alpha_1 \Rightarrow \begin{cases} 1000 + 200 = 1200 \\ 1000 - 200 = 800 \end{cases}$$

وهذا يعني أن الحل الأمثل لن يتغير، لو أن:



وبنفس الطريقة يتم حساب التغير بالنسبة لكل من b_2, b_3 وذلك كما يلي:

$$\bar{b}i = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2400 + \alpha_2 \\ 600 \end{bmatrix}$$

حيث أن: (i=2)

وعليه فإن:

$$B^{-1}\bar{b}i = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 2400 + \alpha_2 \\ 600 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\bar{b}i = \begin{bmatrix} 600 + \frac{2}{3}\alpha_2 \\ 300 + 0.5\alpha_2 \\ 200 - \frac{1}{3}\alpha_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث أن: (i=2)

وتبسيط العلاقة أعلاه نحصل على ما يلي:

$$600 + \frac{2}{3}\alpha_2 \geq 0$$

$$300 + 0.5\alpha_2 \leq 0$$

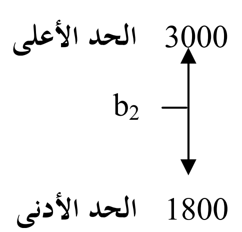
$$200 + \frac{1}{3}\alpha_2 \geq 0$$

ومما تقدم نستنتج أن حدود التغير هي: $-600 \le \alpha_2 \ge +600$ عليه فإن:

$b_2 + 600 = 2400 + 600 = 300$

$b_2 - 600 = 2400 - 600 = 1800$

لذلك فإن:



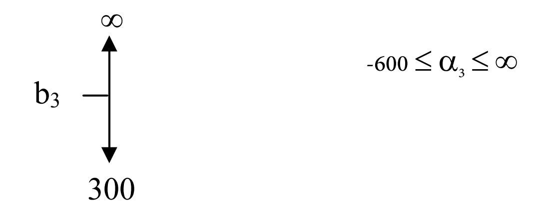
وبنفس الطريقة بالنسبة للمقدار b_3، حيث أن:

حيث أن:(i=3)

$$\bar{b}i = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2400 \\ 600+\alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\bar{b}i = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 2400 \\ 600+\alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 300+\alpha_3 \\ 200 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومن العلاقات أعلاه نستنتج بأن:



$-600 \le \alpha_3 \le \infty$

ومما تقدم يتضح أن مقدار المتوفر من المواد الأولية عندما يتعرض للتغيير، فإن يكون في حدود تم توضيحها أعلاه، وهي بالنسبة لـ S_1 (800,1200) وبالنسبة لـ S_2 (1800,3000) وبالنسبة للمادة الأولية الأخيرة S_3 (300 + ∞)، علماً بأن مثل هذه

التغيرات لا تخرج الحل من موقع الأمثلية، بل أن الذي يتغير هو قيمة المتغيرات الأساسية المثلى، ويتم حسابها من خلال العلاقة الرياضية التالية:

$$X_B^* = B^{-1}\,\bar{b}i$$

حيث أن: $\bar{b}i$ = عمود القيم الحرة الجديد.

وتتغير أيضاً قيمة دالة الهدف، ويمكن بدلاً من أن نعيد حسابها، يمكن أن نستفيد من قيم المتغيرات في ظل النموذج المقابل، ولذلك نعود إلى آخر جدول تم الحصول عليه عند اعتماد طريقة الحل وفق أسلوب المصفوفات، حيث نجد أن زيادة s1 بمقدار وحدة واحدة، فإن ذلك سيؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار 10 (لأن $y_1^* = 10$) وأن زيادة s_2 بمقدار وحدة واحدة سيؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار $\frac{10}{3}$ (لأن $y_2^* = \frac{10}{3}$)، وأن زيادة s3 مهما كانت لن تؤثر على قيمة دالة الهدف لأن $y_3^* = 0$، ومن الجدير بالذكر هنا أن تقلي المتوفر من المواد الأولية سيؤدي إلى تقليل قيمة دالة الهدف.

ومما تقدم نستنتج أن التغيير في المواد الأولية، s_2, s_1 فقط يؤدي إلى تغيير قيمة المتغيرات الأساسية المثلى، دون أن يخرج الحل من موقع الأمثلية، وإذا أخذنا حالة الزيادة، فإن تغير قيمة s_1 إلى 1200، فإن قيمة التغيرات الأساسية في ظل حالة الأمثلية تحسب كما يلي:

$$X_B^* = \begin{bmatrix} x2 \\ x5 \\ x1 \end{bmatrix} = B^{-1}\,\bar{b}i = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1200 \\ 2400 \\ 600 \end{bmatrix}$$

$$X_B^* = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \\ 400 \end{bmatrix}$$

حيث أن: (i=1)

وعلى أساس مـا تقـدم إن الإيـراد المتحقـق مـن عمليـة البيـع سـوف يتغـير بمقـدار $\left(200\,y_1^*\ 200.10 = 2000\right)$، لذلك فإن F = 18000 + 2000 = 20000

ويمكن أن يحسب ذلك بطريقة أخرى وذلك كما يلي:

$$C_B^T\ X_B = \begin{bmatrix}20 & 0 & 30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}400\\0\\400\end{bmatrix} = 8000 + 12000 = 20000$$

وإذا أخذنا حالة النقصان وبالتحديد بالنسبة للمادة الأولية s_2، حيث تقل إلى مقدار 2100، فإن القيمة المثلى للمتغيرات الأساسية تصبح كما يلي:

$$X_B^* = \begin{bmatrix}x2\\x5\\x1\end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b}i = \begin{bmatrix}-1 & \frac{2}{3} & 0\\-1.5 & 0.5 & 1\\1 & -\frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1000\\2100\\600\end{bmatrix}$$

$$X_B^* = \begin{bmatrix}400\\150\\300\end{bmatrix}$$ حيث أن :(i=2)

في هذه الحالة قيمة دالة الهدف سوف تتغير بحدود:

$$-300\,y_2^* = -300\,\frac{10}{3} = -1000$$

ولذلك فإن:

F = 18000 – 1000 = 17000

ويمكن أن يحسب ذلك بطريقة أخرى، وذلك كما يلي:

$$C_B^T\ X_B = \begin{bmatrix}20 & 0 & 30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}400\\150\\3600\end{bmatrix} = 8000 + 9000 = 17000$$

3.5 أمثلة وتطبيقات مختلفة في ترشيد خطط الإنتاج

من أهم استخدامات تحليل الحساسية هو ترشيد خطط الإنتاج حيث من المعروف أن تحليل حساسية النموذج الرياضي هو أشبه بعملية فحص مختبري لأجزاء وعناصر خطة الإنتاج وذلك تمهيداً لعملية إطلاقها إلى الواقع العملي. حيث أن متخذ القرار يرغب عادة في معرفة مدى تحقق حالة الاستخدام الأمثل لمستلزمات الإنتاج وما هي حدود التغيير الممكن في الأرباح أو الأسعار دون أن يؤثر على الحل الأمثل وكذلك ما أثر تغير المتاح من مستلزمات الإنتاج على أمثلية خطة الإنتاج وهكذا، والأمثلة التالية تعرف حالات مختلفة من تحليل الحساسية.

مثال رقم ❶

إحدى المنشآت المتخصصة بصناعة الأعلاف ترغب في طرح أربعة أنواع من التراكيب الغذائية للحيوانات وهي M_1, M_2, M_3, M_4، ومن المفروض أن يدخل في هذه التراكيب نوعين من المكونات وهي B,A، البيانات المتعلقة بهذه المشكلة موضحة في الجدول التالي:

البينات الخاصة بالمشكلة

المكونات	التراكيب الغذائية (لكل 1 كغم)				مقدار المطلوب من المكونات
	M_1	M_2	M_3	M_4	
A	4	0	4	5	120
B	2	6	4	4	180
سعر 1 kg	12	9	16	14	

المطلوب:

1- ما هي كمية التراكيب الواجب شرائها، بحيث تكون كمية المكونات التي تصل إلى الحيوانات بشكل مناسب وأن التكاليف الكلية لشراء التراكيب هي أقل ما يمكن.

2- توضيح تحليل الحساسية بعد أن تتم التغيرات التالية:

أ- تغيير سعر التراكيب الغذائية.

ب- تغيير مقدار المطلوب من المكونات.

الحل:

في البداية يتم صياغة النموذج الرياضية للمشكلة وذلك كما يلي:

دالة الهدف:

$$F=12x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 14x_4 \rightarrow \text{Min.}$$

مستوفياً الشروط التالية:

$$4x_1 + 4x_3 + 5x_4 \geq 120$$

$$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 180$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

إن حل هذه المشكلة سيؤدي إلى الحصول على جدول السمبلكس النهائي التالي:

	Cj	12	9	16	14	0	0	M	M	القيمة الحرة
C_B	المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	R_1	R_2	bi قيمة دالة الهدف (z)
14	X_4	0.8	0	0.8	1	-0.2	0	0.2	0	24
9	X_2	-0.2	1	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$	14
	Zj	9.4	9	12.4	14	-1.6	-1.5	1.6	1.5	462
	Cj-zj	2.6	0	3.6	0	1.6	1.5	M-1.6	M-1.5	

من الجدول السابق يتضح أن النتائج النهائية هي كما يلي:

$$X_B = \begin{bmatrix} x4 \\ x5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 14 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = x_3 = 0 \\ F(x_1, ..., x_4) = 462 \end{matrix}$$

ويمكن من الجدول السابق استنباط النتائج للنموذج المقابل Dual Model وذلـك كـما يلي:

$y_1 = 1.6 \ , \ y_2 = 1.5$

ومن المعلوم أن في تحليل الحساسية يتم الاستفادة من أسلوب حسـاب المصـفوفات ضمن جدول السمبلكس، لذلك، سوف تكون هناك حاجة إلى المصفوفات التالية:

وبما أن قيمة (j) هي رقم (1)، لذلك فإن:

$$\overline{C}_1 = C_1 \mp \delta_1$$

ونبدأ أولا بعملية الزيادة، أي أن:

$$\overline{C}_1 = 12 \mp \delta_1$$

إن اعتماد هذا التغير يؤدي إلى الحصول على جدول السمبلكس التالي:

الحل النهائي بوجود التعديل δ_1

C_B	Cj	12	9	16	14	0	0	M	M	القيمة الحرة
	المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	R_1	R_2	bi قيمة دالة الهدف (z)
14	X_4	0.8	0	0.8	1	-0.2	0	0.2	0	24
9	X_2	-0.2	1	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$	14
	Zj	9.4	9	12.4	14	-1.6	-1.5	1.6	1.5	462
	Cj-zj	$2.6+\delta_1$	0	3.6	0	1.6	1.5	M-1.6	M-1.5	

وبما أن دالة الهدف تصل إلى أقل ما يمكن، لذلك، فإن قيم الحقل (cj-zj) تكـون (كـما هو واضح من الجدول أعلاه) موجبة، حيث أن:

$$(cj - zj) \geq 0$$

أي أن:

$$(2.6 + \delta_1) \geq 0$$

ومنه نحصل على قيمة δ_1، وتساوي:

$\delta_1 \geq -2.6$

وهذا يعني أن حدود δ1 هي:

δ_1 (-2.6 , ∞)

ويتم حساب قيمة $\bar{c}_1$ كما يلي:

$$\overline{C}_1 = 12 + (-2.6) = 9.4$$

ولو تم اعتماد حالة الزيادة، فإن:

$$\overline{C}_3 = C_3 + \delta_3$$

$$\overline{C}_3 = 9 + \delta_3$$

وعلى هذا الأساس يتم تنظيم جدول السمبلكس، حيث تحصل على ما يلي:

المرحلة الأخيرة من جدول السمبلكس مع تغيير C_3

C_B	Cj	12	9	$16+\delta_3$	14	0	0	M	M	القيمة الحرة bi قيمة دالة الهدف (z)
	المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	R_1	R_2	
14	X_4	0.8	0	0.8	1	-0.2	0	0.2	0	24
9	X_2	-0.2	1	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$	14
	Zj	9.4	9	$12.4+\delta_3$	14	-1.6	-1.5	1.6	1.5	462
	Cj-zj	2.6	0	$3.6+\delta_3$	0	1.6	1.5	M-1.6	M-1.5	

وكما ورد في الجدول السابق، طالما أن قيمة دالة الهدف ينبغي أن تصل إلى أقل ما يمكن، فإن كل قيم (cj-zj) ينبغي أن تكون موجبة، أي أن:

$(cj-zj) \geq 0$

لذلك فإن:

$3.6 + \delta_3 \geq 0$

وعليه فإن

$\delta_3 \geq -3.6$

وهذا يعني إن حدود δ_3 هي

$\delta_3\ (-3.6\ ,\ \infty)$

وكذلك:

$\delta_3\ (12.4\ ,\ \infty)$

مما تقدم نلاحظ أنـه وقـع الاختيـار عـلى C_3, C_1، يعـود السـبب إلى كونهـا معـاملات لمتغيرات (x_1, x_3) غير أساسية (حيث لم يظهر كل منها في الحل النهائي)، وقـد لاحظنـا أيضـاً إنها تظهر في حقل واحد من صف القيم $(cj\text{-}zj)$.

بالنسبة للمتغير x_2 الأساسي، فإن عملية اختبار التغير تكون على النحو التالي:

$$\overline{C}_2 = C_2 + \delta_2 = 9 + \delta_2$$

ويظهر أثر هذا التغير من خلال الجدول التالي:

المرحلة الأخيرة من جدول السمبلكس، مع تغيير C_2

C_B	Cj	12	$9+\delta_2$	16	14	0	0	M	M	القيمة الحرة bi
	المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	R_1	R_2	قيمة دالة الهدف (z)
14	X_4	0.8	0	0.8	1	-0.2	0	0.2	0	24
$9+\delta_2$	X_2	-0.2	1	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$	14
	Zj	$9.4-0.2\delta_2$	$9+\delta_2$	$12.4+\frac{2}{15}\delta_2$	14	$-1.6+\frac{2}{15}\delta_2$	$-1.5-\delta_2$			462
	Cj-zj	$2.6+0.2\delta_2$	0	$3.6-\frac{2}{15}\delta_2$	0	$1.6-\frac{2}{15}\delta_2$	$1.5+\frac{1}{6}\delta_2$			

من الجدول السابق وبالذات من الصف الخاص بالقيم (cj-zj)، إن δ_2ينبغي أن يحقق العلاقات التالية:

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 2.6 + 0.2\,\delta_2 \geq 0$$

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 3.6 - \frac{2}{15}\,\delta_2 \geq 0$$

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 1.6 - \frac{2}{15}\,\delta_2 \geq 0$$

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 1.5 + \frac{1}{6}\,\delta_2 \geq 0$$

من العلاقات الرياضية السابقة نستنتج ما يلي:

من العلاقة رقم (1): $\delta_2 \geq -13$

من العلاقة رقم (2): $\delta_2 \leq 27$

من العلاقة رقم (3): $\delta_2 \leq 12$

من العلاقة رقم (4): $\delta_2 \geq -9$

ومن ذلك يتضح أن حدود δ_2 هي:

$$\delta_2\,(-9\,,\;12)$$

وعليه فإن:

$$\overline{C}_2 = C_2 + \delta_2 \quad = 9 + (-9) = 0$$
$$\overline{C}_2 = C_2 + \delta_2 \quad = 9 + 12 = 0$$

لذلك فإن الحل الأمثل يبقى كذلك لو أن بقي C_2 ضمن الحدود (0,21).

وبنفس الطريقة بالنسبة للمتغير x_4 ، حيث يكون لدينا ما يلي:

$$\overline{C}_4 + \delta_4 \quad = 14 + \delta_4$$

الجدول الأخير للحل بموجب طريقة السمبلكس الذي يظهر التغير في C_4 هو كما يلي:

المرحلة الأخيرة في الحل مع تغيير C_4

C_B	Cj	12	9	16	$14+\delta_2$	0	0	M	M	القيمة الحرة bi قيمة دالة الهدف (z)
	المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	R_1	R_2	
$14+\delta_4$	X_4	0.8	0	0.8	1	-0.2	0	0.2	0	24
9	X_2	-0.2	1	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$	14
	Zj	$9.4-0.8\delta_4$	9	$12.4+0.8\delta_4$	$14+\delta_4$	$-1.6-0.2\delta_4$	-1.5			462
	Cj-zj	$2.6+0.8\delta_4$	0	$3.6-0.8\delta_4$	0	$1.6+0.2\delta_4$	1.5			

$$[aij] \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 120 \\ 180 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

وبما أن:

$$X_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

وكما هو معلوم أن المصفوفة B، هي مصفوفة المعـاملات للمتغـيرات التـي تظهـر في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس، عليه فإن:

$$B^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{15} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

أولاً: توضيح تحليل الحساسية بالنسبة لمعاملات دالة الهدف، يبدأ في أحد هذه المعاملات وليكن الخاص بالعنصر M_1، حيث أن:

$$\overline{C}j = cj \mp \delta j$$

من الجدول السابق، وبالتحديد من الحقل (cj-zj) نلاحظ ما يلي:

$$2.6 - 0.8 \quad \delta_4 \quad \geq \quad 0$$

$$3.6 - 0.8 \quad \delta_4 \quad \geq \quad 0$$

$$1.6 - 0.2 \quad \delta_4 \quad \geq \quad 0$$

ومن ذلك نستنتج جدود δ_4 كما يلي:

$$\delta_4 \ (-8 \ , \ 3.25)$$

وعليه فإن

$$\overline{C}_4 + \delta_4 = 14 + (-8) = 14 - 8 = 6$$
$$\overline{C}_4 + \delta_4 = 14 + 3.25 = 17.25$$

لذلك فإن الحل يبقى أمثلاً لو أن C_4 بقي ضمن الحدود (6,17.25).

ثانياً: توضيح تحليل الحساسية بالنسبة للقيم الحرة التي تمثل مقدار ما هو مطلوب من المكونات، يتم على أساس اعتماد العلاقة الرياضية التالية:

$$\overline{b}i = bi \mp \delta i$$

حيث أن:

$$i = 1,2,\ldots,m$$

ولو تم البدء بتحليل التغير الذي يطرأ على القيمة الأولى b1، فإن التعبير عن ذلك رياضياً كما يلي:

$$\overline{b}_1 = \begin{bmatrix} 120 + \delta_1 \\ 180 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{b}_1 = 120 \mp \delta_1$$

حيث أن: δ_1 هو مقدار التغير في مقدار ما هو مطلوب من المكونات الأولى من النوع (A).

وعلى هذا الأساس فإن:

$$B^{-1}\,\overline{b}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{15} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120+\delta_1 \\ 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24+\frac{1}{5}\delta_1 \\ 14-\frac{2}{15}\delta_1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتبسيط نحصل على:

$$24+\frac{1}{5}\delta_1 \geq 0$$
$$14-\frac{2}{5}\delta_1 \geq 0$$

ومن ذلك نستنتج أن حدود $\delta 1$ هي كما يلي:

$\delta 1$ (-120. 105)

وعليه فإن (على افتراض تم أخذ الزيادة):

$$\overline{b}_1 = 120 + (-120) = 0$$
$$\overline{b}_1 = 120 + 105 = 225$$

لذلك فإن الحل يبقى أمثلاً لو أن b_1 بقي ضمن الحدود (0.225) .

لذلك على سبيل المثال لو تم زيادة المقدار b_1 إلى 150 (بدلاً من القيمة الحالية 120) حيث في هذه الحالة قيمة $\delta_1=30$، لذلك فإن القيم الجديدة للمتغيرات الأساسية، سوف تكون كما يلي:

$$Xj = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}\,\overline{b}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{15} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150 \\ 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

حيث (j=4,2)

ومن ذلك فإن قيمة دالة الهدف (التكاليف الكلية للشراء) سوف ترتفع كما يلي:

$y_1\,\delta_1 = 1.6 * 30 = 48$

وبعد إضافة هذا المقدار إلى دالة الهدف الحالية تصبح كما يلي:

$F = 462 + 48 = 510$

وبنفس الطريقة يتم تطبيق هذا التحليل بالنسبة للقيمة b_2، حيث أن:

$$\overline{b}_2 = \begin{bmatrix} 120 \\ 180+\delta_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{b}_2 = 180 \mp \delta_2$$

وعليه فإن:

$$B^{-1}\overline{b}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{15} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 \\ 180+\delta_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 24 \\ 14+\frac{1}{6}\delta_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتبسيط نحصل على ما يلي:

$$14 + \frac{1}{6}\delta 2 \geq 0$$

ومن ذلك نستنتج أن حدود δ_2 هي $(-84, \infty)$، ولذلك فإن الحل الأمثل يبقى كذلك لو أن b_2 بقي ضمن الحدود $(96, \infty)$.

وأخيراً، وعلى سبيل المثال، لو إن قيمة b_2 تـم تغييرهـا إلى 162 وذلـك عـلى أسـاس أن $(\delta_2=-18)$، فإن هذا التغيير سـوف يـؤدي إلى الحصـول عـلى قـيم متغـيرات الأسـاس المـثلى التالية:

$X_2 = 11$
$X_4 = 24$

وأن قيمة دالة الهدف سوف تتغير كما يلي:

$y_2.\,\delta_2 = 1.5\,(-18) = -27$

لذلك فإن:

$F = 462 + (-27) = 435$

مثال رقم ❷

إحدى المنشآت المتخصصة بتقطيع وصناعة الألواح الخشبية، تسلمت طلب لإنتاج 660 قطعة من القياس 1.6م، و 500 قطعة من القياس 1.3م، وقد علمت أن المعمل لديه قطع ثابتة من القياس 5.2، ويتجه المعمل نحو اعتماد أربعة أنواع من بدائل القص.

وقد علمت أن كلفة المتر الواحد هو 20$. البيانات المتعلقة بهذه المشكلة هو كما يلي:

البينات الأساسية للمشكلة

القياسات المطلوبة	بدائل تقطيع الألواح الخشبية			
	I	II	III	IV
1.6	3	2	1	0
1.36	0	1	2	4
التلف (m)	0.4	0.7	1	0
الكلفة $	8	14	20	0

المطلوب:

1- أوجد الحل الأمثل للمشكلة بحيث تكون مخلفات الإنتاج أقل ما يمكن.

2- أوجد الحل الأمثل لو أن المطلوب من القياس الثاني 1.3 ارتفع إلى 660.

الحل:

إن حل هذه المشكلة يبدأ على النحو التالي:

نفرض أن عدد القطع التي يتم الحصول عليها من كل بديل قص هو $\Longleftarrow X$ لذلك سوف يكون لدينا ما يلي:

X_1 ⇐ عدد القطع من بديل القص رقم .I
X_2 ⇐ عدد القطع من بديل القص رقم .II
X_3 ⇐ عدد القطع من بديل القص رقم .III
X_4 ⇐ عدد القطع من بديل القص رقم .IV

وعلى هذا الأساس تكون صيغة النموذج الرياضي للمشكلة كما يلي:

$F = 8x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 0x_4 \rightarrow \text{Min.}$

(1) …………… $3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 660$

(2) …………… $x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq 500$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

إن النتائج النهائية لهذه المشكلة في المرحلة الأخيرة من جدول السمبلكس هي:

حيث أن: x_1, x_4 هي متغيرات أساسية

$$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 125 \end{bmatrix}$$

وإن التكاليف الكلية للتلف المتبقي بعد القص، هي:

$$C_B^T X_B = \begin{bmatrix} 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 220 \\ 125 \end{bmatrix} = 1760$$

أولاً:

ومن أجل تحديد حساسية الحل الأمثل لقاء تغيير معاملات دالة الهدف، يتطلب الأمر التعرف على مقلوب المصفوفة B.

إن المصفوفة B يتم حسابها على أساس أنها تمثل معاملات المتغيرات الأساسية التي ظهرت في المرحلة الأخيرة من جدول السمبلكس (مرحلة الحل الأمثل)، وبالتحديد معاملات المتغيرات x_4, x_1 في كلا القيدين، لذلك فإن:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن المقلوب هو:

$$B^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

إن تحديد صيغة المصفوفة B-1 تمهد الطريقة نحو الحصول على القيم الحرة bi، حيث أن:

$$B^{-1}\overline{b}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 660+\delta_1 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220+\frac{1}{3}\delta_1 \\ 125 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتبسيط نحصل على ما يلي:

$$220 + \frac{1}{3}\delta_1 \geq 0$$

أي أن:

$$\delta_1 \geq -660$$

لذلك فإن حدود التغيير هي:

$$\delta_1 \ (-660 \ , \infty)$$

وعلى هذا الأساس فإن حدود b_1 هي:

$$b_1 \ (0, \infty)$$

وبنفس الطريقة يتم تطبيق هذه الخطوات بالنسبة لـ b2، حيث أن:

$$\overline{b}_2 = 500 \mp \delta_2$$

ولو أخذ الزيادة فقط، فإن:

$$\overline{b}_2 = 500 + \delta_2$$

وعند إدخاله في العمليات الحسابية لجدول السمبلكس نحصل على ما يلي:

$$B^{-1}\overline{b}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 660 \\ 500+\delta_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 660 \\ 125 + \frac{1}{4}\delta_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومن خلال تبسيط العلاقة الرياضية أعلاه، نحصل على ما يلي:

$$125 + \frac{1}{4}\delta_2 \geq 0$$

ومنه نحصل على:

$$\delta_2 \geq -500$$

لذلك فإن حدود δ_2 هي:

$$\delta_2\ (-500, \infty)$$

وأن الحل الأمثل سوف يبقى أمثلاً في ظل حدود التغيير للقيمة b_2 وهي:

$$b_2\ (0, \infty)$$

ثانيــاً:

لو أن مقدار من المادة وارتفع من 500 إلى 660، فإن قيمة المتغيرات الأساسية سوف تتغير على النحو التالي:

$$X_B = B^{-1}\overline{b}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 660 \\ 660 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 165 \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$x_1 = 220$$

$$x_4 = 125$$

وإن قيمة دالة الهدف سوف تكون كما يلي:

$$C_B^T\ X_B\ [80]\ \begin{bmatrix} 220 \\ 165 \end{bmatrix} = 1760$$

وهي نفس القيمة السابقة.

مشاكل تطبيقية مختلفة

مشكلة رقم (1) **Problem no.(1)**

إحدى المنشآت المتخصصة بصناعة البطاريات تنتج ثلاثة أنواع منها:

- النوع الممتاز SS
- النوع القياسي S
- النوع العادي 0

تنتج بواسطة ثلاثة أنواع من المكائن

1- النوع الأول SS يحتاج إلى 2 ساعة على الماكنة M_1 و1 ساعة على الماكنة M_2 و 3 ساعة على الماكنة M_3.

2- النوع S يحتاج إلى 2 ساعة على الماكنة M_1 و 3 ساعة على الماكنة M_2 و1 ساعة على الماكنة M3.

3- النوع 0 يحتاج إلى 1,2,5 ساعة على التوالي.

من خطة الإنتاج يتضح أن المكائن الثلاث لديها طاقة إنتاجية محدودة وذلك كما يلي:

$M_1 \Leftarrow$ لا يتجاوز 40 ساعة

$M_2 \Leftarrow$ لا يتجاوز 30 ساعة

$M_{23} \Leftarrow$ لا يتجاوز 30 ساعة

4- الربح المتوقع من بيع $SS \rightarrow 32$ \$

$SS \rightarrow 34$ \$

$0 \rightarrow 38$ \$

المطلوب:

ما هي الخطة الأسبوعية للإنتاج المثلى، بحيث يكون الربح الكلي أكبر ما يمكن وقد علمت أن النموذج الرياضي لهذه المشكلة هي:

على افتراض: $x \Leftarrow$ كمية الإنتاج من البطاريات

لذلك فإن:

$X_1 \Leftarrow$ كمية الإنتاج من النوع SS

$X_2 \Leftarrow$ كمية الإنتاج من النوع S

$X_3 \Leftarrow$ كمية الإنتاج من النوع 0

وإن: x_6, x_5, x_4 هي متغيرات راكدة.

وأن النموذج الرياضي لهذه المشكلة هي:

دالة الهدف

$$F = 32x_1 + 24x_2 + 48x_3 \rightarrow Max.$$

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 40$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$

$$x_1 , x_2 , x_3$$

المرحلة الأخيرة من جدول السمبلكس الذي يتضمن الحل الأمثل هو:

المرحلة الأخيرة لجدول السمبلكس الذي يعرض الحل الأمثل

C_B	Cj	32	24	0	0	0	0	القيمة الحرة bi قيمة
	X_b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	دالة الهدف(z)
48	X_3	0	0	1	-0.4	-0.2	-0.2	4
24	X_2	0	1	0	-0.15	0.45	-0.05	6
32	X_1	1	0	0	-0.35	0.05	0.55	4
	zj	32	24	48	4.4	2.8	6.8	464
	Cj-zj	0	0	0	-4.4	-2.8	-6.8	

المطلوب:

1- ما هي حساسية الحل الأمثل تجاه تغيير سعر البطاريات الثلاث.

2- استلمت المنشأة طلبية لطرح منتجات جديدة مع الاستفادة المركزة من المكائن M_2,M_1 حيث سوف يترتب على ذلك تخفيض 10 ساعة من الطاقة الإنتاجية المتاحة للمنتجات الثلاث الأولية (0,S,SS)، هل سيؤثر ذلك على الحل الأمثل.

النتائج النهائية

(1)

C_1 (19, 364, 44.5714)

C_2 (17, 7778, 53, 3333)

C_3 (37, 62)

(2) القاعدة الأساس للحل الأمثل لن تتغير، وذلك فيما لو كانت القيم:

b_1 (30,51.4286)

b_2 (16.6667 , 50)

وأن تقليل وقت عمل المكائن M_2, M_1 بمقدار 10 ساعات واقع ضمن الحدود الواردة أعلاه.

مشكلة رقم (2) **Problem no.(2)**

توفرت لديك البيانات التالية المتعلقة بإحدى المصانع المتخصصة بصناعة الأثاث الخشبي المدرسي:

الربح للوحدة الواحدة	الوقت المعروف في الأقسام الثلاث			المنتجات الخشبية
	القسم الثالث	القسم الثاني	القسم الأول	
60	4	8	8	المنضدة
30	3	4	6	الرحله
20	1	3	1	الكرسي

وقد علمت ما يلي:

1- تم إنتاج الأنواع الثلاث (المنضدة، الرحلة، الكرسي) في ثلاث أقسام إنتاجية، وأن وقت العمل محدود لكل واحد من الأقسام الثلاث وكما يلي:

القسم الأول ⇐ 960 ساعة

القسم الثاني ⇐ 800 ساعة

القسم الثالث ⇐ 320 ساعة

2- الربح المتوقع من بيع كل واحدة من المنتجات محدد بالجدول أعلاه.

المطلوب: تحديد هيكل الإنتاج الأمثل الذي يضمن تعظيم الأرباح وقد علمت أن النموذج الرياضي لهكذا مشكلة هو:

دالة الهدف

$$F = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \rightarrow Max.$$

مستوفياً الشروط التالية

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 960$$

$$8x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 800$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 320$$

المرحلة الأخيرة لجدول السمبلكس الذي يعرض الحل الأمثل هو كما يلي:

C_B	Cj	60	30	20	0	0	0	القيمة الحرة bi قيمة
	X_b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	دالة الهدف(z)
0	X_4	0	-2	0	1	1	-4	480
20	X_3	0	-2	1	0	1	-2	160
60	X_1	1	1.25	0	0	-0.25	0.75	40
	zj	60	35	20	0	5	5	5600
	Cj-zj	0	-5	0	0	-5	-5	

من الجدول أعلاه يتضح أنه لأغراض تحويل النموذج الرياضي إلى الصيغة القياسية، تم افتراض x_6, x_5, x_4 كمتغيرات راكدة.

استناداً إلى ما تقدم نطرح التساؤلات التالية:

1- هل أن رفع ربح الوحدة الواحدة من المنتج الثاني (الرحله) من 30 إلى $40 سوف يغير الحل الأمثل.

2- ما هي الحدود التي يمكن أن تصل إليها مستويات الربح المنتج الأول (المنضدة) والمنتج الثالث (الكرسي) لا تؤثر على تغيير الحل الأمثل.

3- ما هي حساسية الحل الأمثل لقاء تغير مقدار ما هو متاح من وقت (وقت العمل) لكل قسم إنتاج.

4- ما هو الحل الأمثل لو أن وقت العمل المتاح للقسم الثالث قد تغير من 320 إلى 400 إلى 400 ساعة، والمقصود هنا ماذا سيحصل بالنسبة لقيم المتغيرات الأساسية X_B ودالة الهدف (F).

النتائج النهائية

1- الحل الأمثل لن يتغير لقاء تغير C_2 فيما لو كان التغير واقع ضمن الحدود $C_2(-\infty, 35)$ وبما أن C_2 ارتفع إلى أكثر من هذه الحدود وهو 40 لذلك فإن الحل الأمثل يتغير ويتم الحصول على حل اعتيادي (حل أفضل).

2- الحدود هي:

المنضدة $C_2\ (56, 80)$

الكرسي $C_3\ (15, 22.5)$

3- حدود التغير بالنسبة للأوقات المتاحة لكل قسم إنتاجي، هي كما يلي:

$b_1\ (480, \infty)$

$b_2\ (640, 960)$

$b_3\ (266.667, 400)$

4- الحل الأمثل الجديد بعد تعديل قيمة b3 من 320 إلى 400 هو كما يلي:

$$X_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$F\ (x_1, x_2, x_3) = 6000\ \$$

مشكلة رقم (3)		**Problem no.(3)**

سبق وأن مرت علينا في الفقرات السابقة والمتعلقة بطرح ثلاثة أنواع من المنتجات وهي w_1, w_2, w_3 وذلك باستخدام نوعين من المواد الأولية S_2, S_1. البيانات المتعلقة بهذه المشكلة هي كما في الجدول التالي:

المنتجات / المواد الأولية	استهلاك المواد الأولية من المنتجات			مقدار المتوفر من المواد الأولية
	W_1	W_2	W_3	
S_1	5	3	0	3600 كغم
S_2	1	2	4	4800 كغم
الربح المتوقع	**10**	**24**	**12**	

المنشأة المذكورة استلمت طلبية بان يكون الإنتاج من المنتج w_1 هو مساوي تماماً للمقدار 300 وحدة، وهذا سوف يفرض إدخال هذا التغير في إطار قيد جديد يضاف إلى القيود الحالية، النموذج الرياضي الجديد في ظل هذا التعديل (بعد أن يضاف إليه المتغيرات الراكدة) هو كما يلي:

دالة الهدف:

$$F = 10x_1 + 24x_2 + 12x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - MR \longrightarrow Max.$$

مستوفياً الشروط التالية

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 960$$

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_1 + +2x_2 + 4x_3 + x_5 = 960$$

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_1 - x_6 + R_3 = 300$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$R_3 \geq 0$$

حيث أن (x_4, x_5, x_6) هي متغيرات راكدة، وأن R_3 هو متغير اصطناعي. الحل النهائي الأمثل لهذه المشكلة كما في الجدول التالي:

C_B	Cj	60	30	20	0	0	0	-M	القيمة الحرة bi
	X_b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	R_3	قيمة دالة الهدف(z)
24	X_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	700
12	X_3	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	775
10	X_1	1	0	0	0	0	-1	1	300
	zj	10	24	12	6	3	23	-23	29100
	Cj-zj	0	0	0	-6	-3	-23	-M+23	

المطلوب:

1- لو أن زيادة الحاجة إلى المنتج W_1 إلى 300 وحدة رافقة زيادة في الربح المتوقع بحدود 70% سيؤثر ذلك على الحل الأمثل.

2- ما هي حساسية الحل تجاه تغير الربح للمنتجات الأخرى.

3- ما هي الحدود العليا والدنيا كما هو متوفر من مواد أولية دون أن يؤثر على أساس الحل الأمثل.

4- هل أن زيادة الطلب على المنتج W_1 إلى 450 يمكن أن يؤدي إلى تغير الحل الأمثل، وماذا سيحصل بالنسبة للأرباح الكلية.

النتائج النهائية

1- إن حدود التغيير لـ C_1 هي: $C_1\ (-\infty,33)$ وأن رفع الربح لـ W_1 إلى 17 لا يغير الحل الأمثل.

2- $C_2(10.2\ ,\ \infty)$ $C_3\ (0,48)$

3- $b_1(1500,\ 8250)$ $b_2\ (1700,\ \infty)$

4- $b3(0,720)$ وأن $b3 \Leftarrow 450$ يقع ضمن المقبول وذلك في الحالة التالية:

$$X_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450 \\ 862.5 \\ 450 \end{bmatrix}$$

$F\ (x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3) = 25650\ \$$

مشكلة رقم (4) **Problem no.(4)**

توفر لديك النموذج الرياضي التالي الذي يعبر عن إحدى المشـاكل الإنتاجيـة: وذلـك لطرح نوعين من الأعلاف P_1, P_2:

دالة الهدف:

$F = 6x_1 + 9x_2 + 0x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + MR_1 + MR_2 + MR_3 \rightarrow$ Min.

مستوفياً الشروط التالية

$3x_1 + 9x_2 - x_3 \qquad +R_1 \qquad = 27$

$8x_1 + +4x_2 \qquad -x_4 \qquad +R_2 \qquad = 32$

$12x_1 + 3x_2 \qquad -x_5 \qquad +R_3 \qquad = 36$

$x_1, \ldots, X_5 \geq 0$

$R_1, R_2, R_3 \geq 0$

الحل النهائي لهذه المشكلة موضح في الجدول التالي:

C_B	Cj	6	9	0	0	0	-M	M	M	القيمة الحرة bi قيمة
	X_b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	R_1	R_2	R_3	دالة الهدف(z)
9	X_2	0	1	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{20}$	0	2
0	X_5	0	0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{33}{20}$	1	$-\frac{2}{15}$	$\frac{33}{20}$	-1	6
6	X_1	1	0	$\frac{1}{15}$	$-\frac{3}{20}$	0	$-\frac{1}{15}$	$\frac{3}{20}$	0	3
	zj	6	9	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{9}{20}$	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{20}$	0	36
	Cj-zj	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{20}$	0	$M-\frac{4}{5}$	$M-\frac{9}{20}$	0	

المطلوب:

1- ما هي حساسية الحل الأمثل تجاه تغير الأسعار C_1, C_2 بشكل عام، وهل أن رفع سعر العلف P_1 لكي يصبح بمستوى سعر العلف P_2 يؤدي إلى تغيير الحـل الأمثـل الذي تم الحصول عليه، وما هو مقدار التكاليف الكلية.

2- لو تم زيادة العنصر الثاني من المكونات (S_2) إلى المقدار 40، كيف سيؤثر ذلك على الحل الأمثل.

3- ما هي حدود التغير لكل S_2, S_1 التي لن تؤثر على الأساس الأمثل.

النتائج النهائية

1- حدود التغير $C_1(3,18)$, $C_2(3,18)$، وأن زيادة سعر P_1 لا يؤثر على الحل الأمثل، وأن التكاليف الكلية سوف تبلغ 45$

2- b_2 (28.3636 , 72) ، وأن $b_2 = 40$ تقع ضمن هذه الحدود.

إضافة لما تقدم:

$$X_B^* = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 19.2 \\ 4.2 \end{bmatrix} \quad F(x_1, x_2) = 39.6 \$$$

3- b_1 (12, 42)

b_3 $(-\infty, 42)$

مشكلة رقم (5) **Problem no.(5)**

النموذج الرياضي التالي يتعلق بشراء ثلاث منتجات غذائية وهي x, y, z وهي تحوي ثلاثة فيتامينات D, C, A، البيانات المتعلقة بهذه المشكلة تم التعبير عنها من خلال النموذج الرياضي التالي:

دالة الهدف:

$F = 4.5x_1 + 9x_2 + 7x_3 \rightarrow Min.$

مستوفياً الشروط التالية

(A).............. $2x_1 + 9x_2 + 7x_3 \geq 70$

(C).............. $2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \geq 40$

(D).............. $6x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 60$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

الحل الأمثل لهذه المشكلة يتضح من خلال الجدول التالي

C_B	Cj	4.5	7.5	6	0	0	0	M	M	M	القيمة الحرة bi قيمة دالة الهدف(z)
	X_b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	R_1	R_2	R_3	
7.5	X_2	0	1	0.8	-0.12	0	0.04	0.12	0	-0.04	6
4.5	X_4	1	0	-0.1	0.04	0	-0.18	-0.04	0	0.18	8
0	X_5	0	0	-5	-0.40	1	-0.20	0.40	-1	0.20	0
	zj	4.5	7.5	0.55	-0.72	0	-0.51	0.72	0	0.51	81
	Cj-zj	0	0	0.45	0.72	0	0.51	M-0.72	M	M-0.51	

المطلوب:

1- هل أن شراء المنتجات الغذائية من النوع y,z بنفس المحتوى من الفيتامينات بسعر أرخص يصل إلى 5$ لكل منهما سيؤثر على الحل الأمثل.

2- هل أن الأساس الأمثل لن يتغير لو أن مقدار المطلوب من كل نوع من الفيتامينات تم تخفيضه بحدود 5%

3- ما هو الحل الأمثل، لو أن عمود القيم الحرة أصبح: $b = \begin{bmatrix} 80 \\ 40 \\ 70 \end{bmatrix}$

النتائج النهائية

-1 $C_2\ (1.5\ ,\ 8.0625)$

$C_3\ (5.5\ ,\ \infty)$

إن قرار شراء y لن يؤثر على الحل الأمثل، في حين أن z يتأثر

-2 في حالة فيتامين C الجواب y، وأن $b_2 = 38$ وحدود التغير له هو: $b_2(-\infty,40)$

أما بالنسبة لكل فيتامين D, A فإن:

$b_1 = 66.5$

$b_1\ (70,\ 270)$

$b_3 = 57$

$b_3(60,\ 210)$

وبناءاً على ما تقدم فإن الأساس الأمثل سوف يتغير.

-3

$$X_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.8 \\ 9.4 \\ 6.0 \end{bmatrix} \quad F\ (x_1\ ,\ x_2,\ x_3) = 93.3\ \$$$

مشكلة رقم (6) **Problem no.(6)**

توفر لديك النموذج الرياضي التالي الذي يتعلق بطرح أربعة منتجات A,B,C,D على ثلاث مكائن O_1, O_2, O_3، وكانت دالة الهدف هي:

$$F = 3x_1 + 1.5x_2 + 4x_3 + 3.5x_4 + 0.x_5 + 0.x_6 - MR_1 - MR_2 \rightarrow Max.$$

مستوفياً الشروط التالية

$$x_1 + 1.5x_3 + 2x_4 + R_1 = 210$$
$$3x_3 + x_4 + x_5 + R_2 = 100$$
$$1.5x_1 + 2x_2 + 1.5x_4 + x6 = 200$$
$$x_1, \ldots, x_6 \geq 0$$
$$R_1, R_2, \geq 0$$

الحل النهائي لهذه المشكلة موضح في الجدول التالي:

C_B	Cj	3	1.5	4	3.5	0	0	-M	-M	القيمة الحرة bi قيمة
	X_b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1	S_2	دالة الهدف(z)
0	X_5	2	0	0	3	1	0	2	-1	320
4	X_3	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{2}{3}$	0	140
1.5	X_2	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	100
	zj	$\frac{91}{24}$	1.5	4	$\frac{155}{24}$	0	0.75	$\frac{8}{3}$	0	710
	Cj-zj	$-\frac{19}{24}$	0	0	$-\frac{71}{24}$	0	-0.75	$-M-\frac{8}{3}$	-M	

المطلوب:

1- من الجدول أعلاه أوجد الحل الأمثل والمصفوفة B.

2- أوجد حساسية الحل الأمثل لقاء تغير ربح كل واحد من المنتجات.

3- ما هو تغير الحل الأمثل لو أن الربح الكلي تغير لقاء تغير الربح للمنتج B من 1.5 إلى 1$.

4- ما هي حدود تغير القيم الحرة R.H.S، على أن لا يؤثر ذلك على أساس الحل الأمثل.

5- ما هو التأثير الذي سيحصل على الحل الأمثل وقيمة دالة الهدف لقاء زيادة الوقت المتاح للعمل للماكنة رقم 3(O_3) إلى 300 ساعة.

النتائج النهائية

-1

$x_1 = x_4 = 0 \quad F(x_1, \ldots, x_4) = 710\$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

-2 $C_1(-\infty, 3.792) \quad C_2(0.444, +\infty) \quad C_3(2.812, +6\infty)$
$C4(-\infty, 6.458)$

-3 إن الحل الأمثل لن يتغير $C_2 = 1 \quad C_2(0.444, +\infty)$
في حين أن الأرباح الكلية سوف تنخفض بمقدار 50، أي أن F=660

-4 $B_1(50, +\infty)$, $b_2(-\infty, 420)$, $b_3(0, +\infty)$

-5
$$X_B^* = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320 \\ 140 \\ 100 \end{bmatrix} \quad F(x_1, \ldots x_4) = 785\$$$

مشكلة رقم (7) **Problem no.(7)**

توفر لديك النموذج الرياضي التالي الذي يتغلب بطرح نوعين من المنتجات (w_2, w_1) من خلال استخدام عدد من المواد الأولية (S_1, S_2)

دالة الهدف

$F = 50x_1 + 75x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 - MR_3 \rightarrow Max.$

(1)………………$2x_1 + x_2 + x_3 = 12$

(2)………………$2x_1 + 2x_2 + x_4 = 20$

(3)………………$x_1 - 2.5x_2 + R_3 = 20$

$x_1, x_2, x3, x4 \geq 0$

$R_3, \geq 0$

المطلوب:

1- ما هي حساسية الحل الأمثل لقاء تغير R.H.S (المتوفر من المواد الأولية).

2- ما هو تغير الحل الأمثل ودالة الهدف لقاء زيادة المادة الأولية S_1 إلى 15.

3- ما هي حدود التغير لأسعار المنتجات بحيث أن الحل الأمثل لن يتغير.

4- لو أن سعر المنتج الثاني W_2 بمقدار 20% هل أن الحل الأمثل سوف يتغير وما هي الأرباح الكلية الجديدة.

البيانات التي تعتمد في هذه الحالة هو آخر مرحلة في جدول السمبلكس الذي يتضمن الحل الأمثل وكما هو وارد أدناه:

C_B	Cj / X_b	50 / X_1	75 / X_2	0 / X_3	0 / X_4	-M / S_1	القيمة الحرة bi قيمة دالة الهدف(z)
75	X_2	0	1	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{3}$	2
0	X_4	0	0	$-\frac{7}{6}$	1	$\frac{1}{3}$	6
50	X_1	1	0	$\frac{5}{12}$	0	$\frac{1}{6}$	5
	zj	$\frac{91}{24}$	1.5	$\frac{200}{6}$	0	$-\frac{50}{3}$	400
	Cj-zj	$-\frac{19}{24}$	0	$-\frac{200}{6}$	0	$-M+\frac{50}{3}$	

النتائج النهائية

-1 $b_1\ (0,\ 17.143)\ ,\ b_2(14.\ +\infty)$

-2 $$X_B^* = \begin{bmatrix} x_2 \\ x4 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 6.75 \end{bmatrix} \quad F(x_1, \ldots x_2) = 500\,\$$$

-3 $C_1\ (-30, +\infty)\quad C_2\ (-125\ +\infty)$

-4 $C_2 = 90\quad C_2\ (-125, +\infty)$

علماً بأن الحل الأمثل لن يتغير والأرباح الكلية سوف ترتفع بمقدار 30

مشكلة رقم (8) Problem no.(8)

النموذج الرياضي التالي يتعلق بمشكلة طرح أربعة أنواع من المنتجات وهي A, B, C, D وذلك باستخدام نوعين (S_2,S_1) من المواد الأولية المحددة:

دالة الهدف

$F = 10x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 11x_4 \rightarrow Max.$

(1)..................$0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 + 0.2x_4 \leq 2000$

(2)..................$0.4x_1 + 0.2x_2 \quad +0.5x_5 \leq 2800$

(3)..................$x_1 - 2.5x_2 \quad +R_3 = 20$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

إن الجدول التالي يمثل المرحلة الأخيرة من جدول السمبلكس والذي يتضح من خلاله الحل الأمثل:

C_B	Cj	10	14	8	11	0	0	القيمة الحرة bi
	X_b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	قيمة دالة الهدف(z)
14	X_2	$\frac{17}{16}$	1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{25}{8}$	$-\frac{5}{4}$	2750
11	X_4	$\frac{6}{16}$	0	-0.5	1	$-\frac{5}{4}$	2.5	4500
	zj	19	14	12	11	30	10	88000
	Cj-zj	-9	0	- 4	0	-30	-10	

المطلوب:

1- سبب تطورات السوق فإن سعر المنتجات D,B يمكن أن يرتفع بمقدار 2 وحدة نقدية وينخفض سعر C,A بمقدار 2 وحدة أيضاً، فما تأثير ذلك على هيكل الإنتاج والإيرادات الكلية.

2- المنشأة ترغب في إضافة 800 كغم من المادة الأولية S_1، هل يؤثر هذا الإجراء على الأساس الأمثل وما هو الحل الجدير.

3- هناك فكرة لتخفيض مقدار المتوفر من المادة الأولية S_2 في الفترة القادمة وذلك بمقدار 500 كغم، هل سيؤثر هذا الإجراء على تغير هيكل الإنتاج.

النتائج النهائية

-1 $C_1\ (-\infty, 19)\ ,\ C_2\ (10.8, 22),\ C_3\ (-\infty, 12)\ ,\ C_4\ (7,19)$

الحل الأمثل لن يتغير، وإن التغير المتوقع في السعر يقع ضمن الحدود المقبولة.

-2 $b_1 = 2800\ (1120\ ,\ 5600)$

لذلك فإن الأساس الأمثل لن يتغير، وإن القيم المثلى لمتغيرات الأساس هي:

$$X_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5250 \\ 3500 \end{bmatrix}\ ,\ \ F(x_1, ... x_4) = 112000\ \$$$

-3 الجواب لا، لأن: $b_2 = 2300\ (1000,\ 5000)$

كذلك فإن: $$X_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5375 \\ 3250 \end{bmatrix}\ ,\ \ F(x_1, ... x_4) = 83000\ \$$$

مشكلة رقم (9) **Problem no.(9)**

النموذج الرياضي التالي يتعلق بإنتاج أربعة أنواع من الأعلاف (p_4, p_3, p_2, p_1):

دالة الهدف

$F = 9.6x_1 + 14.4x_2 + 10.8x_3 + 7.2x_4 \rightarrow$ Min.

(1)………………..$0.8x_1 + 2.4\,x_2 + 0.49x_3 + 0.4x_4 \quad \geq 1200$

(2)………………..$0.6x_1 + 0.6\,x_2 + 0.3x_3 + 0.3x_4 \quad \leq 600$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

على افتراض أن:

متغيرات فائضة $\begin{cases} x_5 \\ x_6 \end{cases}$

متغيرات اصطناعية $\begin{cases} R_1 \\ R_2 \end{cases}$

إن المرحة الأخيرة من جدول السمبكس الذي يتضمن الحل الأمثل هو:

C_B	Cj	9.6	14.4	10.8	7.2	0	0	M	M	bi القيمة الحرة
	X_b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1	S_2	قيمة دالة الهدف(z)
14.4	X_2	0	1	$\frac{5}{16}$	0	$-\frac{5}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{5}{6}$	250
9.6	X_1	1	0	$\frac{3}{16}$	0.5	$\frac{5}{8}$	-2.5	$-\frac{5}{8}$	2.6	750
	zj	9.6	14.4	6.3	4.8	-3	-12	3	12	10800
	Cj-zj	0	0	4.5	2.4	3	12	M-3	M-12	

المطلوب:

1- من المتوقع أن يرتفع سعر المنتجات p_2,p_1 بحدود 20% هل يؤثر ذلك على الحل.

2- هناك إمكانية لشراء المنتج p_1 بسعر أقل من السعر الحالي بمقدار 8 وبنفس المكونات، هل سيؤثر ذلك على الحل الأمثل.

3- قدم أحد المتخصصين في موضوع التغذية استشارته بخصوص رفع متطلبات المادة S_2 إلى 840 وحدة، ما هو التغير في الحل الأمثل لقاء هذا التغير.

النتائج النهائية

-1 $C_2 = 17.28 \; , \; C_2\,(9.6 \,, 28.8)$

وعلى هذا الأساس الحل الأمثل لن يتغير.

-2 $C_1 = 8 \; , \; C_1\,(4.8, 14.4)$

وعلى هذا الأساس فإن الحل الأمثل لن يتغير، وإن تكاليف الكلية للشراء سوف ينخفض إلى 9600$.

-3 $b_3 = 840 \; , \quad b_3\,(300, 900)$

$$X_B^* = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 1350 \end{bmatrix} , \quad F\,(x_1, \ldots x_4) = 13680\,\$$$

مشكلة رقم (10) Problem no.(10)

النموذج الرياضي التالي يتعلق بإحدى المشاكل الخاصة بعملية التغذية لطرح نوعين من المنتجات (P_2, P_1) بشرط وجود ثلاثة مكونات:

دالة الهدف

$F = 6x_1 + 3x_2 + 0.x_3 + 0.x_4\ 0.x_5 + MR_1 + MR_2 + MR_3 \rightarrow Min.$

(1)……………….$0.04x_1 + 0.12\ x_2 - x_3 \quad + R_1 \qquad = 24$

(2)……………….$0.14x_1 + 0.07x_2 \quad - x_4 \qquad + R_2 \quad = 49$

(3)……………….$0.10x_1 + 0.10x_2 \qquad + x_5 \qquad = 70$

(3)……………….$x_1 + \ x_2 \qquad + R_3 \quad = 500$

$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$

$R_1, R_2, R_3 \geq 0$

$$X_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.04 & 0 & -1 \\ 0.17 & 0.14 & 0 & 0 \\ 0.10 & 0.10 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ B\text{-}1 \begin{bmatrix} 0 & -\frac{100}{7} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{100}{7} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.1 \\ -1 & -\frac{8}{7} & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

وأن دالة الهدف المثلى هي:

$F(x1,x2) = 2100$

المطلوب:

1- إن مجهز مادة المكونات الأساسية للعلف قرر تعديل أسعار الأعلاف كما يلي:

$P_1 \Leftarrow$ زيادة بحدود 20%

$P_2 \Leftarrow$ زيادة بحدود 50%

هل سيؤثر هكذا إجراء على الحل الأمثل.

2- لو تم تعديل المطلوب في المكونات من النوع الثاني مـن 49 إلى 56، هـل سـيؤثر هذا الإجراء على تغير الأساس الأمثل، ما هي النتائج الجديدة للحل الأمثل.

النتائج النهائية

-1 $C_1 = 7.2 \quad , \quad C_1\,(3\ ,\ +\infty)$

$C_2 = 4.2 \quad , \quad C_2\,(-\infty, C)$

وعلى هذا الأساس فإن الحل الأمثل لـن يتغـير، في حيـث أن تكـاليف شراء العلـف سوف ترتفع.

-2 $b_2 = 56\ , \quad b_2\,(56,\ 66.5)$

وعلى هذا فإن الأساس الأمثل سوف يتغير فيه x_2,x_1 (وكـذلك x_5,x_3)، وأن قيمتهـا هي:

$X_1 = 300$

$X_2 = 200$

$(x_3 = 12 \quad , \ x_5 = 20)$

$F\,(x_1, x_2) = 2400$



أسئلة وتمارين الفصل الخامس

س1: على أي شيء يعتمد قياس حساسية الحل الأمثل عند تغيير معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف؟

س2: وضح الكيفية التي بموجبها يتم عملية قياس وتحديد حساسية الحل الأمثل تجاه تغير القيم الحرة.

س3: بأي طريقة من عملية تحليل الحساسية يمكن الاستفادة من النموذج المقابل.

س4: توفر لديك النموذج الرياضي التالي:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 80$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

$$F = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \rightarrow Max.$$

ومنه يتم الحصول على الحل الأمثل التالي:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 15 \end{bmatrix}$$

هل أن هذا الحل الأمثل يمكن أن يتغير لو تغيرت دالة الهدف وأصبحت بالصيغة التالية:

$$F = 4x_1 + 10x_2 + 5x_3 \rightarrow Max.$$

س5: على أساس نفس النموذج الرياضي الوارد أعلاه، تم تحديد قيم الحدود العليا والدنيا للقيم الحرة b_i وذلك على النحو التالي:

b_1 (33.33 , 100)

b_2 (70, 210)

هل سيبقى الحل أمثلاً لو أن:

$b_2 = 200$, $b_1 = 90$

س6: اكتب حالات تحليل الحساسية بالاعتماد على رمز $\mp \lambda$ باعتباره عامل التغيير.

س7: ما هي أهمية تحليل الحساسية بالنسبة لعملية تخطيط الإنتاج.

س8: هل لتحليل الحساسية دور في ترشيد قرارات المنشأة في مجال الإنتاج أو تخطيطه.

س9: ما هي أهمية القيم الحرة R.H.S في تحليل الحساسية.

س10: وضح دور وأهمية كل واحد من العناصر التالية في تحليل الحساسية:

X_j , b_j , c_j

الفصل السادس

نمـــــــــاذج النقل

الفصل السادس

نماذج النقل

Transportation Models

في البداية نعرض فكرة نموذج النقل والصيغة الرياضية له كما هو وارد في الفقرة أدناه:

1.6 فكرة نموذج النقل وصيغته الرياضية

للمرة الأولى تم طرح هكذا نوع من النماذج من قبل العالم (F.L.Hitchock) لمعالجة مشاكل نقل الإنتاج من مواقع الإنتاج إلى مواقع الاستهلاك، يمكن توضيح فكرة هكذا نوع من النماذج بعد أن يتم وضع الفرضيات التالية:

R ⇐ عدد مراكز التوزيع لبضاعة معينة

A_i ⇐ مقدار ما هو متوفر من بضاعة في المركز (i) حيث أن: (i=1,2,…,R)

N ⇐ عدد مراكز الاستلام

B_j ⇐ مقدار حاجة مراكز الاستلام j من البضاعة حيث أن (j=1,2,…,N)

مع العلم أن كل مركز توزيع يمكن أن يوزع البضاعة التي لديه إلى أي من مراكز الاستلام وأن هذه الأخيرة يمكن أن تستلم البضاعة من أي مركز توزيع.

C_{ij} ⇐ تكاليف نقل البضاعة في مركز التوزيع (i) إلى مركز الاستلام (j) حيث أن:

(I=1,2,…,R) , (j=1,2,…,N)

حيث أن التكاليف الكلية للنقل هو حاصل جمع كافة مسارات النقل الممكنة.

المطلوب هـو إعـداد خطـة إنتـاج لنقـل البضـائع مـن مراكـز التوزيـع (i) إلى مراكـز الاستلام (j) بحيث تكون التكاليف الكلية للنقل أقل ما يمكن. إن هـذه الخطـة تركـز عـلى تحديد قيم التعريف التالي:

Xij ⟸ وهو متغير القرار في النموذج الرياضي لمشكلة النقل والذي يمثـل مقـدار أو كمية البضائع المنقولة من (i) مركز توزيع إلى (j)مركز استلام. حيث أن

(i= 1,2,…,R)

(j= 1,2,…,N)

من أجل أن يتم التعامل مع هكـذا نـوع مـن الـنماذج الرياضـية، يتطلـب الأمـر أن يتحقق الشرط التالي:

$$\sum_{i=1}^{R} Ai \geq \sum_{j=1}^{N} bj$$

إن مجموع كمية البضاعة المعروضة في مراكز التوزيع، ينبغي أن لا يقل عن مجموع الكميات المطلوبة في مراكز الاستلام.

من الشرط السابق يمكن أن نستنتج الحالات التالية:

أولاً: النقل المتوازن أو حالة المساواة، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{R} Ai = \sum_{j=1}^{N} Bj$$

ويطلق على هذه الحالة اسم النقل المغلق.

ثانياً: النقل المفتوح أو حالة عدم التوازن، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{R} Ai > \sum_{j=1}^{N} Bj$$

وفيما يلي توضيح لكل واحدة من الحالات الواردة أعلاه.

2.6 نموذج النقل المغلق

إن مكونات هذا النموذج يتكون من:

أولاً: القيود الأساسية

1- قيود مراكز التوزيع

$$\sum_{i=1}^{N} xij = Ai \qquad (i = 1,2,...,R)$$

مركز التوزيع يرسل بضائع بقدر ما هو يملك

2- قيود مراكز الاستلام

$$\sum_{i=1}^{R} xij = Bj \qquad (i = 1,2,...,N)$$

مركز الاستلام يستلم بضائع بقدر ما هو يحتاج

3- قيود اللاسلبية

$$Xij \geq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,R ,\quad j = 1,2,\ldots,N)$$

ثانياً: دالة الهدف

$$K(xij) = \sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{N} cij\, xij \quad \rightarrow \quad Min$$

حيث أن $K(xij)$ التكاليف الكلية للنقل ينبغي أن تكون أقل ما يمكن.

إن حل هكذا نوع من النماذج الرياضية يتم من خلال مراحل متسلسلة وطرق مختلفة، حيث أن البداية تكون عادة مخصصة لإيجاد الحل الابتدائي الممكن، وبعد ذلك يتم تحسين الحل باستخدام طريقة أخرى غير الطريقة الأولى وهكذا لغاية بلوغ الحل الأمثل. وقبل البدء بعملية الحل لا بد من وضع البيانات الخاصة بالمشكلة في إطار جدول خاص لذلك يعرف بجدول النقل كما هو واضح أدناه:

جدول رقم (6-1) الصيغة العامة لجدول النقل(1)

Di / Si	D_1	D_2	……..	Dn	Ai
S_1	C_{11} X_{12}	C_{11} X_{12}	……..	C_{1n} X_{1n}	a_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{21} X_{22}	……..	C_{2n} X_{2n}	a_2
⋮			……..		⋮
Sr	Cr_1 Xr_1	Cr_2 Xr_2	……..	Cr_n Xr_n	ar
Bj	b_1	b_2	……..	Bn	$\sum_{i=1}^{m} Ai$ / $\sum_{i=1}^{n} Bj$

حيث أن:

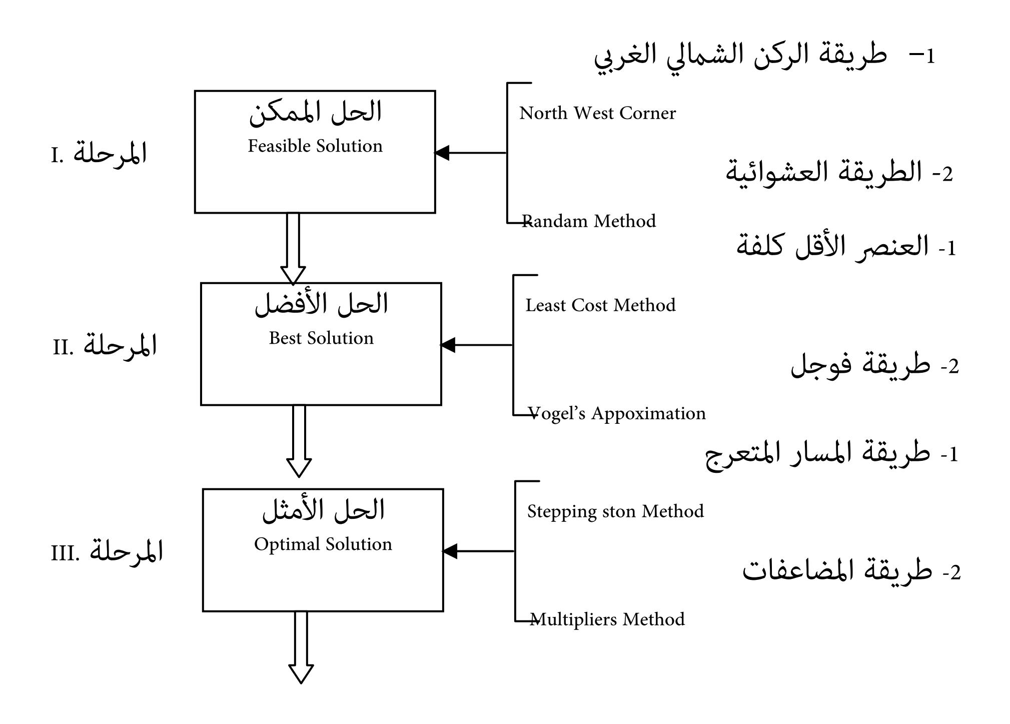
Si ⇐ مراكز التوزيع التي عددها i

Di ⇐ مراكز الاستلام التي عددها j

بعد أن يتم وضع البيانات الخاصة بالمشكلة ضمن الجدول أعلاه والذي هو عبارة عن مجموعة خلايا للنقل، يتم بعد ذلك البدء بالحل، حيث أن لكل نوع حل هنالك طرق خاصة به لإيجاد الحل المطلوب.

إن الشكل الذي يعبر عن تطبيق الطرق المختلفة لإيجاد الحل الممكن والأفضل والأمثل هو كما يلي:

(1) يكون عدد حقول هذا الجدول الأفقية والعمودية حسب عدد مراكز التوزيع والاستلام التي ترد ضمن المشكلة.



إن توضيح فكرة استخدام أو تطبيق الطرق السابقة من أجل الحصول على الأنواع المختلفة من الحلول:

- الحل الممكن Feasible Solution.
- الحل الأفضل Best Solution.
- الحل الأمثل Optimal Solution.

يتطلب ذلك تهيئة البيانات التطبيقية المستمدة من واقع الحال والتي تتعلق بتسويق البضائع والسلع من مراكز التوزيع إلى مراكز الاستلام أو الاستهلاك. في دراستنا الحالية سوف يتم التركيز على طريقة الركن الشمالي الغربي من المرحلة الأولى، وطريقة العنصر الأقل كلفة من المرحلة الثانية، حيث من الممكن أن نصل إلى الحل الأمثل في ظل هاتين الطريقتين، ومهما كانت طريقة الحل المستخدمة، يذهب بعض المتخصصين

في هكذا نوع من المشاكل إلى اعتماد علاقة رياضية تعتبر كأساس لتحديد قيمة xij وبالتالي توزيع البضائع بين مراكز التوزيع والاستلام، وهذه العلاقة هي:

$$X_{ij} = Min. (a_i, b_j)$$

حيث أن:

$i= 1,2,\ldots r$

$j= 1,2,\ldots n$

والمثال التالي يوضح هذه الفكرة.

مثال رقم ❶

ثلاثة مخازن تحتوي على كميات من مادة الطحين وهي M1, M2, M3، تقوم هذه المخازن بتوزيع هذه المادة إلى أربعة مخابز تعمل في مواقع جغرافية مختلفة، البيانات المتعلقة بهذه المشكلة موضحة في الجدول التالي:

المخازن	المخابز				Ai
	P_1	P_2	P_3	P_4	
M_1	50	40	50	20	70
M_2	40	80	70	30	50
M_3	60	40	70	80	80
Bj	40	60	50	50	200

المطلوب:

ما هي خطة توزيع مادة الطحين على المخابز بحيث أن تكاليف النقل تكون أقل ما يمكن. استخدم لذلك كل من طريقة

1- الركن الشمالي الغربي.

2- العنصر الأقل كلفة.

الحل:

من الجدول أعلاه يتضح أن

$$\sum_{i=1}^{3} Ai \quad = \quad \sum_{j=1}^{4} Bj = 200$$

وهذا يعني أن المشكلة متوازنة، لذلك فإنها تعتبر من مشاكل النقل المغلق.

إن القيود الخاصة بهكذا مشكلة يمكن كتابتها كما يلي:

1. قيود مراكز التوزيع

$$M_1 \Rightarrow X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = \sum_{j=1}^{4} X_1 j = 70$$

$$M_2 \Rightarrow X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = \sum_{j=1}^{4} X_2 j = 50$$

$$M_3 \Rightarrow X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = \sum_{j=1}^{4} X_3 j = 80$$

2. قيود مراكز الاستلام

$$S_1 \Rightarrow X_{11} + X_{21} + X_{31} = \sum_{i=1}^{3} Xi_1 = 40$$

$$S_2 \Rightarrow X_{12} + X_{22} + X_{32} = \sum_{i=1}^{3} Xi_2 = 60$$

$$S_3 \Rightarrow X_{13} + X_{23} + X_{33} = \sum_{i=1}^{3} Xi_3 = 50$$

$$S_4 \Rightarrow X_{14} + X_{24} + X_{34} = \sum_{i=1}^{3} Xi_4 = 50$$

وإن دالة الهدف هي كما يلي:

$$K(xij) = 50X_{11} + 40X_{12} + 50X_{13} + 20X_{14} + 40X_{21} + 80X_{22} + 70X_{23} +$$

$$30X_{24} + 60X_{31} + 40X_{32} + 70X_{33} + 80X_{34} \rightarrow Min.$$

حيث أن:

$$Xij \geq 0$$

$i = 1,2,3$
$j= 1,2,3,4$

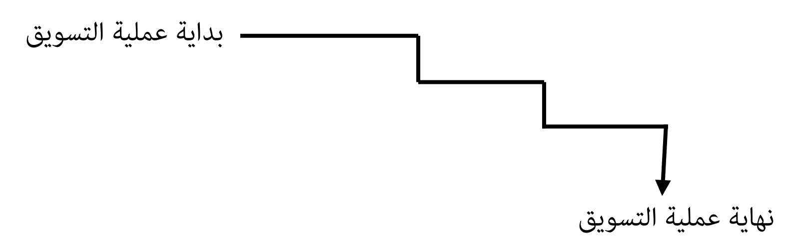
أولاً: الحل وفق طريقة الركن الشمالي الغربي

تبدأ عملية الحل من الربع الواقع في الركن الشمالي الغربي من الجدول ا لسابق وبالتحديد من خلية النقل التالية:

خلية النقل الواقعة في الركن الشمالي الغربي من جدول النقل.

C_{11}	
	X_{11}

ومن ثم تستمر عملية توزيع أو تسويق البضائع أو السلع من مراكز التوزيع إلى مراكز الاستلام وفق صيغة متدرجة يمكن تشبيهها بالسلم المتدرج التنازلي، أي أن:



وبعد أن تتم عملية التوزيع أو التسويق يتم تحديد تلك الخلايا التي حدث فيها نقل فعلي (مسارات النقل)، وهي تلك الخلايا التي فيها $Xij>0$ وتهمل الخلايا التي يكون منها $(Xij=0)$.

إن تطبيق العلاقة الرياضية السابقة يكون على النحو التالي:

$$Xij = Min\ (ai, bj)$$

$$X_{11} = Min\ (a_1, b_1)$$

عليه فإن:

$$X_{11} = Min\ (70, 40) = 40$$

ويحذف هذا الرقم من الكمية المعروضة والكمية المطلوبة ويتم الانتقال إلى الخليـة التالية، حيث أن:

$$X_{12} = \text{Min}\ (a_1, b_1)$$

$$X_{12} = \text{Min}\ (30, 60)=30$$

وهكذا بالنسبة لبقية خلايا النقل في الجدول الذي يحوي بيانات المشـكلة، حيـث في النهاية سوف نحصل على الجدول التالي:

المخازن					Ai
	P_1	P_2	P_3	P_4	
M_1	40	30			70
M_2		30	20		50
M_3			30	50	80
Bj	40	60	50	50	200

وإن قيمة دالة الهدف هي:

$$K(xij) = 50.40 + 40.30 +$$

$$+ 80.30 + 70.20$$

$$+ 70.30 + 80.50 = 13100$$ دينار

إن هذه النتيجة لطريقة الركن الشمالي الغربي يمكن أن يـتم تحسـينها بالانتقـال إلى الطريقة التالية، وهي طريقة العنصر الأقل كلفة.

ثانياً: الحل وفق طريقة العنصر الأقل كلفة

إن هذه الطريقة أفضل من الطريقة السابقة في توزيع ونقل الكميـات الموجـودة في مراكز التوزيع إلى مراكز الاستلام[1]. فكرة هذه الطريقة هي حيث يتم تحوير المصفوفة

(1) هناك طرق أخرى يتم اعتمادها لهذا الغرض مع الاعتماد على العلاقة الرياضية Xij= (ai, bj) في عمليـة التوزيـع بعـد أن يقع الاختيار على العنصر الأقـل كلفـة في المصـفوفة. لمزيـد مـن التفاصـيل، راجـع كتابنـا: "الأسـاليب الكميـة في الإدارة" إصدار مؤسسة اليازوري للنشر والتوزيع عمان، الأردن 2004.

بحيث يكون في كل صف وفي كل عمود على الأقل قيمة صفرية واحدة ويكون هـذا الإجراء على أساس الخطوات التالية:

1- من كل صف في المصفوفة تطرح أقل قيمة من بقية القيم.
2- من كل عمود في المصفوفة أعلاه تطرح أقل قيمة من بقية القيم.

بعد أن يصبح في كل صف وعمود قيمة صفرية بعد ذك تتم عملية التوزيـع بحيـث يكون في كـل قيمـة صـفرية (أي هـي أقـل الكلـف) كميـة مـن البضـاعة، بحيـث إذا تـم استيعاب كل الكميات المعروضة والمطلوبة ضـمن القـيم الصـفرية، فـإن ذلـك يعنـي تـم الحصول على الحل الأمثل، وإذا لم يكن كذلك، فإن الحل الذي تم الحصول عليه هو الحل الأفضل، وينبغي الاسـتمرار في خطـوات الحـل باسـتخدام الطـرق التـي وردت في المرحلـة الثالثة.

بالعودة إلى المثال السابق، فإن عملية الحل تتم وفق الخطوات التالية:

1. طرح أقل قيمة من كل قيم الصف، أي أن:

المخازن	المخابــز				Ai
	P_1	P_2	P_3	P_4	
M_1	30	20	30	0	70
M_2	10	50	40	0	50
M_3	20	0	30	40	80
Bj	40	60	50	50	200

2. طرح أقل قيمة من كل قيم الأعمدة في المصفوفة الواردة في الجدول أعلاه، أي أن:

المخازن	المخابــز				Ai
	P_1	P_2	P_3	P_4	
M_1	20	20	0	0	70
M_2	0	50	10	0	50
M_3	10	0	0	40	80
Bj	40	60	50	50	200

بعد أن أصبح في كل صف وفي كل عمود قيم صفرية، فإن الخطوة التالية هي البدء بعملية التوزيع، حيث يتم البدء بالكمية X_{21} وتتم عملية الترصيد بعد كل عملية نقل وتوزيع، حيث في النهاية نحصل على الجدول التالي:

المخازن	المخابـــز				Ai
	P_1	P_2	P_3	P_4	
M_1			30	40	70
M_2	40			10	50
M_3		60	20		80
Bj	40	60	50	50	200

وإن دالة الهدف تحسب على النحو التالي:

$$K(xij) = 50.30 + 20.40 +$$
$$+40.40 + 30.10+$$
$$+ 40.60 + 70.20 = 8000$$ دينار

وعند المقارنة:

13000 طريقة الركن الشمالي الغربي

(8000) طريقة العنصر الأقل كلفة

5000 الفرق

إن المشكلة أعلاه يمكن تحويلها إلى نموذج البرمجة الخطية الذي سبق توضيحه سابقاً، وذلك كخطوة نحو حلها باستخدام الحاسوب بمساعدة أحد البرامجيات الجاهزة، وذلك كما يلي:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	R.H.S
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	70
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	50
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	80
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	40
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	60
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	50
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	50
[50	40	50	20	40	40	80	70	30	60	40	70]	

وبعد إدخال هذه البيانات للحاسوب يتم الحصول على النتائج التالية:

Number	Variables		Solution
1.	X_1	X_{11}	0
2.	X_2	X_{12}	40
3.	X_3	X_{13}	30
4.	X_4	X_{14}	40
5.	X_5	X_{21}	0
6.	X_6	X_{22}	0
7.	X_7	X_{23}	0
8.	X_8	X_{24}	50
9.	X_9	X_{31}	0
10.	X_{10}	X_{32}	60
11.	X_{11}	X_{33}	20
12.	X_{12}	X_{34}	0

Obj. function Value $\Rightarrow$ 8000 دينار

3.6 نماذج النقل المفتوح(1)

إن القاعدة الرياضية الأساسية في تفسير القيود في نموذج النقل الاعتيادي هي العلاقة الرياضية التالية:

$$\sum_{i=1}^{R} Ai \geq \sum_{j=1}^{N} Bj$$

وعلى أساس هذه العلاقة يتم تفسير نماذج النقل المفتوح، حيث أن الأمر يعالج في هذه الحالة بإدخال مركز استلام وهي يحمل القيم N+1الذي سوف يأخذ الكمية B_{N+1} ، حيث أن:

$$B_{N+1} = \sum_{i=1}^{R} Ai - \sum_{j=1}^{N} Bj$$

وبنفس الطريقة يتم التعبير عن تكاليف المركز الوهمي كما يلي:

$(Ci,_{N+1})$

إن المقارنة بين نموذج النقل المفتوح والمغلق هي كما يلي:

نقل مفتوح / Model	نقل مغلق /Model	
$\sum_{i=1}^{N+1} xij = Ai \; (i = 1,..., R),$	$\sum_{i=1}^{N} xij = Ai \; (i = 1,..., R),$	قيود مراكز التوزيع
$\sum_{i=1}^{R} xij = Bj \; (j = 1,..., N+1),$	$\sum_{i=1}^{R} xij = Bj \; (j = 1,..., N),$	قيود مراكز الاستلام
$\sum_{i=1}^{R} \sum_{j=1}^{N+1} cij \, xij = min,$	$\sum_{i=1}^{R} \sum_{j=1}^{N} cij \, xij = min,$	دالة الهدف

(1) تفاصيل أكثر دقة يجدها القارئ في كتابنا الموسوم "بحوث العمليات وتطبيقاتها في منظمات الأعمال" مع الدكتور محمود العبيدي، إصدار دار الوراق للنشر والتوزيع، الأردن، عمان 2004.

مثال رقم ❶

بالعودة إلى نفس بيانات المثال السابق بعد أن يتم زيادة المتوفر من الموجود في المخزن M إلى 100، حيث يصبح الجدول بعد ذلك كما يلي:

المخازن	المخابـــز				Ai
	P_1	P_2	P_3	P_4	
M_1	50	40	50	20	100
M_2	40	80	70	30	50
M_3	60	40	70	80	80
Bj	40	60	50	50	

وقد علمت أن في نية المنشأة افتتاح مخبز جديد لاستيعاب الطاقة الخزينة الفائضة من مادة الطحين، وقد علمت أن تكاليف النقل إلى المخبز الجديد كما يلي:

من M_1 $(C_{15}=5)$

من M_2 $(C_{25}=5)$

من M_3 $(C_{35}=5)$

المطلوب: ما هي خطة النقل التي تجعل التكاليف الكلية أقل ما يمكن.

الحل:

أن الموقف الحالي بين الكميات المعروضة والمطلوبة يمكن أن نعبر عنها رياضياً كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{3} Ai = 230 > \sum_{j=1}^{4} Bj = 200$$

وهو كما ذكرنا حالة النقل المفتوح. وهو يعني أن مجموع ما هو معروض من المخازن أكبر مما هو مطلوب، وبعبارة أخرى أن مراكز التوزيع أو المخازن حالياً

يمكنها أن ترسل أقل مما هو موجود فعليا لديها، ويمكن التعبـير عـن ذلـك رياضـياً كما يلي:

$$M_1 \Rightarrow X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = \sum_{j=1}^{4} 1j \leq 100$$

$$M_2 \Rightarrow X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = \sum_{j=1}^{4} 2j \leq 50$$

$$M_3 \Rightarrow X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = \sum_{j=1}^{4} 3j \leq 80$$

ومقابل ذلك نجد أن شروط مراكز الاستلام تبقى دون تغير أي أن:

$$S_1 \Rightarrow X_{11} + X_{21} + X_{31} = \sum_{i=1}^{3} i1 = 40$$

$$S_2 \Rightarrow X_{12} + X_{22} + X_{32} = \sum_{i=1}^{3} i2 = 60$$

$$S_3 \Rightarrow X_{13} + X_{23} + X_{33} = \sum_{i=1}^{3} i3 = 50$$

$$S_4 \Rightarrow X_{14} + X_{24} + X_{34} = \sum_{i=1}^{3} i4 = 50$$

إن دالة الهدف تبقى كما هي التي وردت في المثال السابق.

يتم تحويل هذه الصيغة في حالة عدم التوازن إلى حالة التوازن وذلك بإضـافة مركـز استلام وهي Dummy، ولذلك فإن المركز المذكور سـوف نطلـق عليـه رمـز (D)، وأن مقـدار حاجة هذا المركز هي:

$$b5 = \sum_{i=1}^{3} Ai - \sum_{j=1}^{4} Bj = 230 - 200 = 30$$

الجدول الذي يعرض الحالة الجديدة للمشكلة هو كما يلي:

المخازن	المخابـــز					Ai
	P_1	P_2	P_3	P_4	F	
M_1	50	40	50	20	5	100
M_2	40	80	70	30	5	50
M_3	60	40	70	80	6	80
Bj	40	60	50	50	30	230

وعلى هذا الأساس فإن الصيغة الجديدة لنموذج المشكلة هي:

شروط مراكز التوزيع

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = \sum_{j=1}^{5} x_1 j \leq 100$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = \sum_{j=1}^{5} x_2 j \leq 50$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = \sum_{j=1}^{5} x_3 j \leq 100$$

العلاقات الرياضية الخاصة بمراكز الاستلام هي:

شروط مراكز الاستلام

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = \sum_{j=1}^{3} xi1 = 40$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = \sum_{j=1}^{3} xi2 = 60$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = \sum_{j=1}^{3} xi4 = 50$$

$$X_{15} + X_{25} + X_{35} = \sum_{j=1}^{3} xi5 = 30$$

$Xij \geq 0 \quad (I= 1,2,3; \quad j = 1,2,\ldots,5)$

وإن دالة الهدف هي:

$$K(xij) = 50x_{11} + 40x_{12} + 50x_{13} + 20x_{14} + 5x_{15} + 40x_{21} + 80x_{22} + 70x_{23} +$$

$$30x_{24} + 5x_{25} + 60x_{31} + 40x_{32} + 70x_{33} + 80x_{34} + 6x_{35} \rightarrow \min$$

إن حل هـذه المشـكلة باسـتخدام طريقـة العنصرـ الأقـل كلفـة، يبـدأ أولاً بتحضـير مصفوفة التكاليف التي يظهر فيها في كل صف وفي كل عمود قيمة صـفرية واحـدة عـلى الأقل، أي أن:

المخازن	المخابـــز					Ai
	P_1	P_2	P_3	P_4	F	
M_1	10	1	0	0	0	100
M_2	0	41	20	10	0	50
M_3	19	0	19	59	0	80
Bj	40	60	50	50	30	230

وعلى أساس هذه القيم الصفرية يتم توزيع ما هو موجود من كميات مـن الطحـين في مراكز التوزيع (المخازن) إلى مراكز الاستلام (المخابز)، حيث يتضح مـن عمليـة التوزيـع أن القيم الصفرية تستوعب كل ما هو معروض من كميات، لذلك فإن الحل في هذه الحالـة سوف يكون هو الأمثل، وأن الجدول الذي يعرض عملية التوزيع هو:

المخازن	المخابـــز					Ai
	P_1	P_2	P_3	P_4	F	
M_1			50	50		100
M_2	40				10	50
M_3		60			20	80
Bj	40	60	50	50	30	230

وعلى هذا الأساس فإن دالة الهدف هي:

$$K(xij) = 2500 + 1000 + 1600 + 2400 + 50 + 120 = 7670$$

ويذهب البعض إلى اعتبار أن قيمة دالة الهدف هي عبارة عن نوعين من التكـاليف في هذه الحالة، أي أن:

تكاليف النقل = 2400 + 1600 + 1000 + 2500 = 7500 دينار

تكاليف الخزن = 50 + 120 = 170 دينار

حيث أن المجموع الكلي للتكاليف هو: 7500 + 170 = 7670 دينار

وتفسير ذلـك هـو أن البضـاعة في مركـز الاسـتلام الـوهمي تعتـبر وكأنهـا مرسـلة إلى مخازن خاصة بمراكز التوزيع.

4.6 نماذج الإنتاج- النقل

إن هذا النوع من النماذج الرياضية يكون فيها مراكز التوزيع ليست مخازن بل هو مصانع منتجة أو منشآت صناعية تطرح أنواع مختلفة من المنتجات والسلع، وعلى هذا الأساس، فإن توضيح هذا النوع من النماذج يتطلب وضع التعاريف التالية:

R ⇐ رمز العدد الكلي للمنتجين

Ai ⇐ مقدار الطاقة الإنتاجية، حيث أن: (i=1,2,…,R)

N ⇐ رمز العدد الكلي للمستهلكين

Bj ⇐ مقدار الحاجة الفعلية، حيث أن: (j=1,2,…,N)

يؤخذ في هذه الحالة افتراض أن مجموع الطاقة الإنتاجية تساوي مقدار الحاجة الفعلية للإنتاج، أي أن

cij ⇐ تكاليف نقل الوحدة الواحدة من المنتوج من المصنع (i) لغاية المستهلك(j)

Hi ⇐ تكاليف الإنتاج في المصنع (i)

دالة الهدف في هذه الحالة تشير إلى أن تكون مجموع تكاليف النقل والإنتاج الكلية أقل ما يمكن، وبخصوص معالجة عدم المساواة بين العرض والطلب أو ما يعرف بحالة عدم التوازن فإن الأمر يعالج كما يلي:

1- في حالة عدم تساوي الكميات المنتجة مع الكميات المعروضة، فإن في هذه الحالة يتم اعتماد نفس الفكرة السابقة، عندما كانت البضاعة المعروضة أكبر من الطلب عليها، حيث يتم احتساب الفرق في الكمية بين ما هو منتج وبين ما هو مطلوب كما يلي:

$$B_{N+1} = \sum_{i=1}^{R} Ai \ - \ \sum_{j=1}^{N} Bj$$

ويمثل B_{N+1} مقدار ما هو مطلوب من منتجات في مركز الاستلام الوهمي.

-2 إن التكاليف الكلية لكل من النقل والإنتاج يعبر عنها من خلال الرمز Kij، حيث أن:

$$Kij = hi + cij$$

$$(I=1,2,\ldots,R\ ,\quad j=1,2,\ldots N)$$

ومن الجدير بالذكر هنا، أن:

$$Ki,_{N+1} = 0$$

وهو يعني أن الطاقة الإنتاجية غير المستغلة تساوي صفر.

إن متغير القرار هو: $\boxed{xij}$ ويعرف كما يلي:

Xij ⇐ كمية الإنتاج في المصانع (i) المطروحة للبيع أو التسويق إلى مراكز الاستهلاك من النوع (j)

في حالة النقل المفتوح الذي يحول إلى مغلق، يكون متغير القرار أعلاه كما يلي:

$$\boxed{Xi,_{N+1}}$$

وهو يعني الكمية الفائض من الإنتاج ومن المفروض أن تنقل من المصانع (i) إلى المستهلكين أو أن تحول إلى المخازن.

مثـــــال

لو توفرت نفس بيانات المشكلة السابقة، مع إضافة أخرى، وهي أن نفس المنشأة اتجهت لبضاعة المعجنات من خلال ثلاثة مصانع وهي (M_1,M_2, M_3)، حيث أن Ai يمثل الطاقة الإنتاجية للمعجنات، وقد علمت أن تكاليف النقل والإنتاج 1 طن في المعجنات هي الأساس في عملية ساب التكاليف الكلية، الجدول التالي يتضمن البيانات الخاصة بالمشكلة:

المصانع	المحلات				Ai	hi
	P_1	P_2	P_3	P_4		
M_1	50	40	50	20	100	1080
M_2	40	80	70	30	50	1060
M_3	60	40	70	80	80	1100
Bj	40	60	50	50		

وقد علمت أن:

Cij: تكاليف النقل

Hi: تكاليف الإنتاج

المطلوب: ما هي خطة النقل والإنتاج التي تجعل مجموع تكاليف الإنتاج والنقل وخزن الفائض من الإنتاج أقل ما يمكن.

الحل:

من أجل البدء بعملية الحل نفرض أن xij هو متغير القرار الذي يمثل حجم الإنتاج في المصنع (i) الذي يتم تجهيزه إلى المحل (j) (أو إلى مخزن الإنتاج الفائض).

إن القيود بهذه المشكلة هي نفسها، أما بالنسبة لمجموع التكاليف الكلية (وهي تكاليف النقل والإنتاج) مع المحل الجديد ا لافتراضي Dummy فهي كما في الجدول التالي:

المصانع	المحلات					Ai
	P_1	P_2	P_3	P_4	D	
M_1	1130	1120	1130	1100	0	100
M_2	1100	1140	1130	1130	0	50
M_3	1160	1140	1170	1170	0	80
Bj	40	60	50	50	30	

وإن دالة الهدف هي:

$$K(Xij) = 1130X_{11} + 1120X_{12} + 1130X_{13} + 1100X_{14} + 0X_{15} +$$
$$1100X_{21} + 1140X_{22} + 1130X_{23} + 1090X_{24} + 0X_{25} +$$
$$1160X_{31} + 1140X_{32} + 1170X_{33} + 1180X_{34} + 0X_{35} \rightarrow Min.$$

إن الحل الأمثل لهذه المشكلة باعتماد تكاليف النقل هي كما يلي:

$X_{12} = 10$, $X_{13} = 50$, $X_{14} = 40$, $X_{21} = 40$, $X_{24} = 10$, $X_{32} = 50$, $X_{35} = 30$

$K(x) = 143,600$

إن كمية المعجنات التي تقع ضمن العمود (D.) تعني أنها لم تجهز للمستهلكين في المحلات، بل هو محفوظ في المخازن ويمكن أن تجهز في المستقبل، ولو أخذنا بنظر الاعتبار أن تكاليف المحلات الافتراضية كما في المثال السابق، يكون لدينا ما يلي:

$$\left.\begin{matrix} K_{15} \Rightarrow 1080 + 5 = 1085 \\ K_{25} \Rightarrow 1060 + 5 = 1065 \\ K_{35} \Rightarrow 1100 + 6 = 1106 \end{matrix}\right\}$$ تكاليف الإنتاج والخزن

وعلى هذا الأساس فإن الحل الأمثل حسب طريقة العنصر الأقل كلفة هو كما يلي:

$X_{13} = 50$, $X_{14} = 50$, $X_{21} = 40$, $X_{25} = 10$ $X_{32} = 60$, $X_{35} = 20$

وأن دالة الهدف هي $K(x) = 256670$

5.6 نموذج مواقع الإنتاج

إن نموذج النقل المفتوح والنموذج الذي ارتبط به في الفقرة السابقة، وهو نموذج (الإنتاج-النقل) يمكن تفسيره بشكل آخر وبما يتلائم مع مشاكل الإنتاج المختلفة ومنها اتخاذ القرار بخصوص تحديد مواقع الإنتاج الجديدة أو ما يسمى بالمشاريع المزمع إقامتها في المستقبل القريب. وفي هكذا نوع من النماذج الرياضية يكون قائم على أساس افتراضي أن المواقع الجديدة للإنتاج قد تم إقامتها ولم تعد مشكلة بالنسبة لمتخذ القرار، في حين أن المشكلة تكمن في تحديد كمية أو حجم الإنتاج في كل موقع إنتاج

وكذلك مقدار ما هو مطلوب نقله أو تسويقه من مواقع الإنتاج المختلفة بما فيها المواقع الإنتاجية المتوقع إقامتها.

ومن أجل توضيح الفكرة، يتطلب الأمر اعتماد نفس الرموز التي وردت في الفقرة السابقة، مع الاختلاف في تسمية المتغير الأساس:

Xij ⇐ مقدار أو كمية الإنتاج في الموقع (i) الذي تم تجهيزه إلى المستهلك (j).

أما بالنسبة للعلاقات الرياضية التي سوف تعتمد في هذه الحالة فهي:

1. $$\sum_{i=1}^{R} Ai > \sum_{j=1}^{N} Bj$$

2. $$Ai < \sum_{j=1}^{N} Bj \quad (i = 1,2,...,R)$$

لتوضيح فكرة هذا النموذج نأخذ المثال التالي:

مثال رقم ❶

مشروع إنتاجي يتضمن إقامة ثلاثة مواقع إنتاجية لتصبح مشتقات الحليب وبالتحديد (الزبدة) وذلك لتجهيز أربعة مواقع استلام وهي P,R, S, T، أما بالنسبة لمواقع الإنتاج المقترحة، فهي يمكن أن تقام في P,R,S، البيانات المتعلقة بـ:

Ai ⇐ الطاقة الإنتاجية المتاحة في المواقع (i)

Bj ⇐ الحاجة إلى مادة الزبدة في مراكز الاستلام (j) (كغم)

Hi ⇐ تكاليف الإنتاج في المواقع (i)

Cij ⇐ مقدار تكاليف النقل

هذه البيانات تتضح من خلال الجدول التالي:

cij	P	R	S	T	Ai	hi
P	0	0.4	0.5	1	3000	8
R	1	0	0.8	0.6	2000	9
R	0.5	0.5	0	0.8	2500	8.4
Bj	1000	2000	1000	1000		

المطلوب:تحديد مواقع الإنتاج وبما يجعل التكاليف الخاصة بالإنتاج والنقل أقل ما يمكن.

الحل:

من الجدول السابق، يتضح أن الشرط الأول الذي ورد في بداية هذه الفقرة، تم تحقيقه، أي أن:

1. $$\sum_{i=1}^{R} Ai > \sum_{j=1}^{N} Bj$$

أي أن:

$$\sum_{i=1}^{3} Aj = 7500 > \sum_{j=1}^{4} Bj = 5000$$

ومن ذلك نستشف بأن هناك مشكلة إقامة موقع إنتاجي جديد.

أما بالنسبة للشرط الثاني: فإن:

2. $$Ai < \sum_{j=1}^{N} Bj$$

أي أن:

$$A_1 = 3000 < \sum_{i=1}^{4} Bi$$

$$A_2 = 2000 < \sum_{i=1}^{4} Bi$$

$$A_3 = 2500 < \sum_{i=1}^{4} Bi$$

وبعد أن يتم تحويل صيغة الجدول السابق إلى مشكلة نقل مغلق وكذلك اعتماد تكاليف الإنتاج في كل مواقع إنتاج، فإن الجدول الخاص بالمشكلة هو:

cij	P	R	S	T	F	hi
P	8.0	8.4	8.5	9.0	0	3000
R	10.0	9.0	9.8	9.6	0	2000
R	8.9	8.9	8.4	8.4	0	2500
Bj	1000	2000	1000	1000	2500	7500

متغير القرار هو ويعني:

Xij⇐ كمية الإنتاج من الزبدة في الموقع الإنتاجي (i) الذي تم تجهيزه إلى مركز الاستلام (j).

مع العلم أن: (i=1,2,3) xi5 طاقة الإنتاج غير المستغلة في مواقع الإنتاج، وعلى هذا الأساس النموذج الرياضي لهكذا مشكلة هو كما يلي:

$$\sum_{j=1}^{5} x_1 j = 3000$$
$$\sum_{j=1}^{5} x_2 j = 2000$$
$$\sum_{j=1}^{5} x_3 j = 2500$$

الشروط الخاصة بمواقع الإنتاج

$$\sum_{i=1}^{3} xi_1 = 1000$$
$$\sum_{i=1}^{3} xi_2 = 2000$$
$$\sum_{i=1}^{3} xi_3 = 1000$$
$$\sum_{i=1}^{3} xi_4 = 1000$$
$$\sum_{i=1}^{3} xi_5 = 2500$$

الشروط الخاصة بمواقع الإنتاج

علماً بأن:

$$X_{ij} \geq 0$$

$$(i= 1,2,3, \; j =1,2,\ldots,5)$$

وأن دالة الهدف هي:

$$K(x_{ij}) = 8.0X_{11} + 8.4X_{12} + 8.5X_{13} + 9.0X_{14} + 0X_{15} +$$
$$10.0X_{21} + 9.0X_{22} + 9.8X_{23} + 9.6X_{24} + 0X_{25}+$$
$$8.9X_{31} + 8.9X_{32} + 8.4X_{33} + 9.2X_{34} +0X_{35} \rightarrow Min.$$

الحل الأمثل يتضح من خلال المصفوفة التالية:

$$X^* = \begin{bmatrix} 1000 & 2000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1000 & 1000 & 500 \end{bmatrix} \quad K(x^*)= 42400 \text{ دينار}$$

من أجل تدنية مجموع تكاليف الإنتاج والنقل لمادة الزبدة، يتطلب الأمر بناء مواقع إنتاج في الأماكن S,P، مع العلم أن موقع الإنتاج في P فقط هو الذي سوف تكون الطاقة الإنتاجية فيه مستقلة بالكامل، ويفترض في هذا الموقع أن يجهز 2000كغم زبدة إلى مركز الاستلام R، وأن الموقع الإنتاجي من المفروض أن يجهز 1000كغم زبدة إلى مركز الاستلام T وهكذا بالنسبة للبقية كما هو واضح من المصفوفة أعلاه.

6.6 نموذج تقليل الحمولات الفارغة

وهو من النماذج الرياضية المشتقة من نموذج النقل الأساسي ويهدف إلى تقليل التكاليف المختلفة بما فيها تقليل الحمولات الفارغة، ومن أجل توضيح فكرة هذا النوع من النماذج نضع الافتراض التالي:

نفرض أن هناك n في المدن التي يتم بينها عمليات تبادل في البضائع وأن كل مدينة هي عبارة عن نظام مغلق، أي أن المواقع الموجودة داخل كل مدينة يمكن أن

تقوم بعملية إرسال البضائع، وفي نفس الوقت تقوم باستلام البضائع أيضاً، بعبارة أخرى كل موقع هو عبارة عن مرسل ومستلم في آن واحد وفي فترة زمنية واحدة وباستخدام نفس وسيلة النقل.

من المعطيات المعلومة في هكذا نوع من النماذج الرياضية هو:

dij ⇐ المسافة بين المدن (i,j=1,2,...,n)

aij ⇐ كمية البضاعة المنقولة.

إن لكل مدينة يمكن أن يكون تجديد وسائل النقل المطلوبة لنقل البضائع من (i) من المدن هي:

$$Wi = \sum_{j \neq 1}^{n} aij \qquad (i = 1,2,...,n)$$

وأن وسائل النقل اللازمة لنقل البضائع إلى (i) من المدن تتضح من خلال العلاقة الرياضية التالية:

$$Pi = \sum_{j \neq 1}^{n} aij \qquad (i = 1,2,...,n)$$

وعلى هذا الأساس فإن من المفروض أن يتحقق الشرط التالي:

$$\sum_{i \neq = 1}^{n} Wi = \sum_{i=1}^{n} Pi$$

في بعض المدن، قد لا يكون (wi) مساوياً (pi)، ولهذا السبب قد تظهر حالة يكون فيها بعض وسائل النقل فارغة، ولهذا السبب تظهر حالة من عدم التوازن، بحيث يكون هناك تكدسا في البضائع في بعض المدن مع العلم أن هنالك وسائل نقل فارغة.

على أساس ما تقدم تكون خطة الإنتاج المثلى هي تلك الخطة التي يكون خلالها مجموع الكيلومترات الكلية من المساقات التي تم إنجازها تكون ضمنها الحمولة الفارغة أقل ما يمكن.

وعلى أساس ما تقدم نستنتج الحقائق التالية:

1- المدينة التي تنطبق عليها العلاقة الرياضية ($wi>pi$) تعتبر مستقبله لوسائل النقل الفارغة. وأن كمية أو عدد وسائل النقل الفارغة القادمة تحسب على النحو التالي:

$$Bi = wi - pi$$

حيث أن:

$$Bi > 0$$

2- المدينة التي تنطبق عيها العلاقة ($wi<pi$) تعتبر مصدر لخروج وسائل النقل الفارغة. إن مقدار أو عدد وسائل النقل الفارغة الخارجة تحسب كما يلي[(1)]:

$$ai = pi-wi$$

عليه فإن:

ai = مقدار العرض من السيارات الفارغة.

bi = مقدار الطلب على السيارات الفارغة.

لذلك فإن التعرف على (ai) مقدار العرض من السيارات الفارغة والمقدار (bi) مقدار الطلب على السيارات الفارغة، ومقدار المسافة بين المدن (dij) يمكن التوصل إلى صيغة للنقل المغلق، والمثال التالي يوضح هكذا نوع من المشاكل.

مثال رقم ❷

البيانات التي سترد في الجدول أدناه، تتعلق بعملية نقل مادة الطحين بين سبعة من المدن. المطلوب هو تقليل حركة السيارات الفارغة ذات الحمولة 50 دن إلى أقل مستوى ممكن:

(1) تم إهمال الحالة التي يكون فيها: wi=pi.

dij	L	M	N	O	P	R	S	Wi
L	0	20	50	100	150	200	100	1000
M		0	40	20	30	50	20	2000
N			0	100	150	200	100	1000
O				0	40	30	150	100
P					0	80	70	200
R						0	60	1000
S							0	500
Pi	500	1000	2000	1000	1000	300	0	5800

من الجدول السابق يتضح أن:

Wi= مقدار المعروض (طن)

Pi = مقدار المطلوب (طن)

الحل:

في البداية يتم تقسيم المدن إلى مدن مرسلة وأخرى مستلمة للحمولات الفارغة، وأن الفرق بين العرض والطلب هو:

Pi – wi

عليه فإن المدن التي سوف تكون مرسلة هي:

P1 – wi > 0

والمدن التي سوف تكون مستلمة هي:

Pi – wi < 0

وعلى هذا الأساس فإن لدينا ما يلي:

L :500 : 50 – 1000 : 50 = -10
M :1000: 50 – 2000 : 50 = -20
N: 2000 :50 – 1000: 50 = 20
O: 1000 :50 – 100 : 50 = 18
P: 1000 :50 – 200 : 50 = 16
R :300 :50 – 1000: 50 = -14
S 0 – 500 : 50 = -10

من الحسابات أعلاه يتضح أن المدن P,O,N هو مدن مصدره للسيارات الفارغة، والمدن S, R, M,L هي مدن مستلمة للسيارات الفارغة، وعلى هذا الأساس سوف يتم

بناء نموذج للنقل المغلق بالاعتماد على أساس ثلاث مدن مرسلة وأربعة مدن مستلمة كما هو واضح في الجدول التالي:

مرسل	مستلم				Ai
	P_1	P_2	P_3	P_4	
N	50	40	200	100	20
O	100	20	30	150	18
P	150	30	80	70	16
Bj	10	20	14	10	54

إن المتغير الأساس في هذه الحالة هو:

Xij= مقدار السيارات الفارغة المرسلة من (i) من المدن المرسلة إلى (j) من المدن المستلمة.

النموذج الرياضي لهكذا مشكلة هو كما يلي:

(1) المجموعة الأولى من الشروط:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{4} x_1 j = 20 \\ \sum_{j=1}^{4} x_2 j = 18 \\ \sum_{j=1}^{4} x_3 j = 16 \end{array}\right]$$

الشروط بالنسبة للمدن المرسلة (مراكز التوزيع)

(2) المجموعة الثانية من الشروط:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{3} xi_1 = 10 \\ \sum_{i=1}^{3} xi_2 = 2 \\ \sum_{i=1}^{3} xi_3 = 14 \\ \sum_{i=1}^{3} xi_4 = 10 \\ xij \geq 0 \end{array}\right]$$

الشروط بالنسبة للمدن المرسلة (مراكز الاستلام)

وأن دالة الهدف هي:

$$K(xij) = 50X_{11} + 40X_{12} + 200X_{13} + 100X_{14} + 100X_{21} + 20X_{22} + 30X_{23} + 150X_{24} + 150X_{31} + 30X_{32} + 80X_{33} + 70X_{34} \rightarrow Min.$$

إن قيمة هذه الدالة $K(xij)$ تساوي أقل مقدار ممكن الكيلـومترات المقطوعـة تكـون فيها حمولة السيارات فارغة إن تطبيق طريقـة العنصرـ الأقـل كلفـة يـؤدي إلى الحصـول الحل الأمثل المطلوب والذي يتضح من خلال المصفوفة التالية:

$$X^* = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 14 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

ومنه يتم تحديد قيمة دالة الهدف وهي:

$K(x)^* = 2280$ كيلو متر محسوب بمقدار وسيلة النقل (سيارة، قطار...الخ)

ويتم تحليل هذه النتائج على أساس أن حركة السيارات الفارغة يكون أقل ما يمكن، ينبغي أن يكون ما يلي:

1- المدينة N ترسل 10 سيارات إلى المدينة L.
2- المدينة N ترسل 10 سيارات إلى المدينة M.
3- المدينة O ترسل 4 سيارات إلى المدينة M.
4- المدينة O ترسل 4 سيارات إلى المدينة R.
5- المدينة P ترسل 6 سيارات إلى المدينة M.
6- المدينة P ترسل 10 سيارات إلى المدينة S.

مشاكل تطبيقية مختلفة

مشكلة رقم(1) **Problem no.(1)**

ثلاثة مواقع تطرح ترسل مواد أولية نصف مصنعة إلى خمسة معامل تتوزع في مواقع جغرافية مختلفة، وقد علمت ما يلي:

1- مواقع التوزيع لديها مواد أولية كما يلي:
- الموقع .I = 500 طن
- الموقع .II = 700 طن
- الموقع .III = 900 طن

2- مواقع الاستلام (المعامل) تحتاج إلى:
- الموقع رقم (1) = 400 طن.
- الموقع رقم (2) = 400 طن.
- الموقع رقم (3) = 700 طن.
- الموقع رقم (4) = 300 طن.
- الموقع رقم (5) = 300 طن.

الجدول التالي يتضمن تفاصيل تتعلق بطول المسافة بين مواقع التوزيع ومواقع الاستلام (محسوبة بالكيلومترات):

مواقع التوزيع	مواقع التسليم				
	1	2	3	4	5
I	130	250	330	170	400
II	290	190	400	260	160
III	150	350	240	190	210

وقد علمت ما يلي:

1- المسافة لغاية 200 كيلو متر الكلفة لكل 1 كيلو متر/ طن 8 دينار.

2- إذا زادت المسافة عن 200 كيلو متر يتم التحول إلى سيارة أخرى وتكون عندها الكلفة هي 1 كيلومتر/ طن 6 دينار.

المطلوب: أوجد خطة النقل بحيث تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن.

النتائج النهائية

$$x = \begin{bmatrix} 400 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 0 & 300 & 100 \\ 0 & 0 & 700 & 0 & 200 \end{bmatrix}$$

K(x) = 500500 دينار

مشكلة رقم(2) **Problem no.(2)**

ثلاثة من مخازن الموز تقوم بتجهيز أربعة محلات بيع متوزعة في مواقع جغرافية مختلفة وتتكرر العملية كل ثلاثة أيام، علماً بأن في وقت النقل والتسويق للموز يتلف البعض منه في الطريق. البيانات المتعلقة بهذه المشكلة هي كما يلي:

مراكز التوزيع	مراكز الاستلام				Ai
	S_1	S_2	S_3	S_4	
H_1	2.0	3.0	4.0	1.0	2200
H_2	5.0	7.0	3.0	2.0	2000
H_3	1.0	4.0	8.0	3.0	2800
Bj	1500	1400	2600	1500	

المطلوب: تحديد خطة النقل بحيث يكون الموز التالف أقل ما يمكن.

النتائج النهائية

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 100 & 600 & 1500 \\ 0 & 0 & 2000 & 0 \\ 1500 & 1300 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K(xij) = 16900$$

مشكلة رقم(3) **Problem no.(3)**

ثلاثة من مناجم الفحم K_1, K_2, K_3 تقوم بتجهيز الفحم الحجري إلى خمسة مواقع لتوليد الطاقة الحرارية S_1,S_2,S_3,S_4,S_5 متوزعة في مواقع جغرافية مختلفة، وأن أي هذه المواقع يمكن أن تستقبل 400 طن شهرياً من الفحم شهرياً، بينما طاقة كل واحد من المناجم هي:

- $k_1 = 600$ طن/شهرياً.
- k_2=700 طن/ شهرياً.
- k_3=700 طن/ شهرياً.

إن تكاليف استخراج 1 طن هي:

- 108 دينار في المنجم k_1
- 96 دينار في المنجم k_2
- 102 دينار في المنجم k_3

شهرياً

الجدول التالي يتضمن تفاصيل تتعلق بطول المسافة بين مواقع التوزيع ومواقع الاستلام (محسوبة بالكيلومترات):

المناجم	مواقع توليد الطاقة				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
K_1	14	5	9	24	15
K_2	30	24	11	8	19
K_3	9	22	15	7	18

المطلوب:

تحديد خطة النقل بحيث تكون التكاليف الكلية للنقل والاستخراج أقل ما يمكن.

النتائج النهائية

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 400 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 400 & 300 & 0 \\ 400 & 0 & 0 & 100 & 200 \end{bmatrix}$$

$K(x) = 223100$ دينار

مشكلة رقم(4) **Problem no.(4)**

توفرت لديك المتجهات والمصفوفة التالية:

$$[Ai]=\begin{bmatrix}460\\340\\300\end{bmatrix},\ [Bj]=\begin{bmatrix}350\\200\\350\end{bmatrix},[hj]=\begin{bmatrix}90\\80\\80\end{bmatrix},\ \ [Cij]=\begin{bmatrix}6 & 8 & 12\\10 & 2 & 4\\8 & 10 & 16\end{bmatrix}$$

حيث أن:

Ai = حجم الإنتاج في ثلاث مصانع.

Bj = مقدار الحاجة إلى الإنتاج من قبل ثلاث مواقع استلام.

Hi = مقدار مستلزمات الإنتاج المصروفة على الإنتاج.

Cij= مقدار التكاليف المتعلقة بنقل الإنتاج من المصانع (i) إلى مواقع الاستلام (j).

المطلوب:

ما هي خطة النقل التي تجعل من التكاليف الكلية (تكاليف الإنتاج والنقل والتخزين لما هو فائض من الإنتاج) أقل ما يمكن، علماً بأن تكاليف الخزن للوحدة الواحدة في الإنتاج في كل واحدة من المصانع تبلغ على التوالي 2,3,2 دينار.

النتائج النهائية

$$x=\begin{bmatrix}350 & 100 & 10 & 0\\0 & 0 & 340 & 0\\0 & 100 & 0 & 200\end{bmatrix}\ K(x) = 95490$$

$$x=\begin{bmatrix}250 & 0 & 10 & 200\\0 & 0 & 340 & 0\\100 & 200 & 0 & 0\end{bmatrix}\ K(x) = 77490$$

مشكلة رقم(5) Problem no.(5)

من المقرر أن يتم إقامة ثلاثة مواقع لإنتاج الأصواف وذلك لتجهيز أربعة معامل لصناعة المنتجات النسيجية المختلفة. علماً بأن مواقع إنتاج الأصواف تتواجد في مناطق جغرافية مختلفة وهي D,C,B,A. وأن الطاقة الإنتاجية لها هي على التوالي، 30000,20000,40000,40000متر.

إن المعامل التي تتولى صناعة المنتجات النسيجية قامت بتحديد حاجاتها من الأصواف على النحو التالي: 40000,15000,25000,20000 متر.

إن تكاليف الإنتاج للأصواف في كل واحدة من مواقع الإنتاج هي كما يلي 25,24,24,51,23 دينار. الجدول التالي يتضمن تفاصيل تتعلق بتكاليف نقل الأصواف من مواقع الإنتاج إلى المعامل:

مواقع الإنتاج	معامل صناعة المنتجات الصوفية			
	1	2	3	4
A	2.5	1	5	6
B	2	0.5	3.5	4.5
C	1.5	4	3	2
D	1.5	3	2	1.5

المطلوب:

وضع خطة النقل بحيث تكون تكاليف النقل والإنتاج أقل ما يمكن.

النتائج النهائية

$$x = \begin{bmatrix} 15000 & 25000 & 0 & 0 & 0 \\ 5000 & 0 & 5000 & 0 & 30000 \\ 0 & 0 & 0 & 20000 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 & 20000 & 0 \end{bmatrix}$$

$K(x) = 2575000$

مشكلة رقم(6) **Problem no.(6)**

اثنين من المحطات لانطلاق باصات لنقل الركاب (II,I.) تنطلق فيها الباصات إلى أربعة مواقع D_1, D_2, D_3, D_4، المطلوب هو تنظيم مسارات النقل بحيث يكون النقل الفارغ أقل ما يمكن، البيانات المتعلقة بالمسافة وعدد الباصات تتضح من الجدول التالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	Ai
I	15	12	10	17	100
II	5	18	24	7	150
Bj	40	65	45	60	

حيث أن: Ai ⇐ عدد الباصات في المحطات (i)

Bj ⇐ عدد المواقع

النتائج النهائية

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 55 & 45 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & 0 & 60 & 40 \end{bmatrix}$$

K(x) = 1910 كيلومتر/ باص

مشكلة رقم(7) **Problem no.(7)**

توفرت لديك البيانات المتعلقة بأحد مشاكل النقل الفارغ.

	1	2	3	4	5	6	
1	0	8	12	21	30	14	9
2		0	20	8	10	7	11
3			0	18	11	10	10
4				0	7	12	18
5					0	19	14
6						0	18
	15	18	17	9	7	7	80

المطلوب: حل المشكلة بوضع خطة للنقل يكون فيها النقل الفارغ أقل ما يمكن.

النتائج النهائية

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

مشكلة رقم(8) Problem no.(8)

الجدول التالي يتضمن المسافة بين 7 محطات تنطلق منها وسائل نقل مختلفة لنقـل بضائع وسلع، وقد علمت أن:

P_i = حجم الحمولات المرسلة

W_i = حجم الحمولات المطلوبة

المحطات	1	2	3	4	5	6	7	Pi
1	0	56	38	132	21	55	24	18
2		0	27	46	31	10	99	9
3			0	22	44	33	77	16
4				0	18	9	66	15
5					0	90	11	19
6						0	44	8
7							0	5
wi	5	13	22	7	7	12	9	

المطلوب:

تصميم خطة النقل بحيث أن الحمولات الفارغة تكون أقل ما يمكن.

النتائج النهائية

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$k(x) = 781$ كيلو متر/ حاوية

مشكلة رقم(9) Problem no.(9)

إحـدى مؤسسـات النقـل تملـك أسـطول مـن الشـاحنات عـددها 75 يسـتفيد منهـا مجموعات من العـاملين في الأعـمال الإنشـائية في مواقـع البنـاء، أي أن الشـاحنات تخـدم مواقع البناء وتنقل منها وإليها مختلف المستلزمات الإنشائية والعاملين. البيانات المتعلقـة بهذه المشكلة تتضح من خلال الجدول التالي:

مواقع البناء	1	2	3	4	5	6	المعروض
1	0	15	5	50	45	20	10
2		0	2	40	25	33	15
3			0	10	15	20	15
4				0	60	45	15
5					0	24	12
6						0	8
	17	25	2	11	8	12	75

المطلوب:

وضع خطة للنقل الفارغ بين مواقع البناء، بحيث تكون عدد (الكيلـومترات/ وسـيلة النقل) الفارغة أقل ما يمكن.

النتائج النهائية

$$X = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$K(x) = 411$ كيلو متر/ وسيلة نقل

مشكلة رقم(10) **Problem no.(10)**

منشأة إنتاجي تملك جرارات تعمل بين 7 مواقع، وقد توفرت البيانات التالية عن المشكلة:

- جدول رقم (1) يتضمن مقدار البضائع التي تنتقل بين هذه المدن.
- جدول رقم (2) يتضمن المسافة محسوبة بالكيلومترارت بين هذه المدن

الجدول الأول

j / i	النقل من المدينة I إلى المدينة J						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0	5	8	11	4	6	16
2	10	0	8	7	6	5	12
3	9	4	0	5	5	10	7
4	4	3	3	0	6	9	17
5	20	15	4	9	0	8	6
6	10	9	7	8	11	0	11
7	8	7	6	5	7	9	0

الجدول الثاني

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0	18	34	55	10	21	50
2		0	53	29	64	19	10
3			0	18	33	22	14
4				0	54	9	36
5					0	13	15
6						0	19
7							0

المطلوب:

تصميم خطة للنقل الفارغ، بحيث تكون عدد (الكيلومتر/جرار) فارغ أقل ما يمكن.

النتائج النهائية

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$k(x) = 537$ كيلو متر/ جرار



أسئلة وتمارين الفصل السادس

س1: عرف وقارن بين متغيرات الأساس xij في كل من:

- نموذج النقل.
- نموذج توزيع مواقع الإنتاج.
- نموذج تقليل النقل الفارغ.

س2: ما هو المطلوب لصياغة نموذج (الإنتاج-النقل) وعلى أساس رموز مفترضة حدد الصيغة الرياضية لهذا النموذج.

س3: ما هو الفرق بين نموذج توزيع مواقع الإنتاج ونموذج النقل.

س4: حدد ما هي الحالات التي يمكن عندنا تطبيق نموذج تحليل عمليات النقل الفارغ.

س5: وضح ما هي مواصفات الطريقة التي بموجبها يتم الحصول على الحل الابتدائي الممكن في مشكلة النقل، وكيف يتم الحصول على الحل الأفضل ثم الأمثل.

س6: ما هي حالات وأنواع نماذج النقل.

س7: ما هو موقع نموذج النقل بالنسبة للبرمجة الخطية.

س8: ما علاقة وأهمية جدول النقل في حل مشكلة النقل.

س9: هل يمكن الحصول على الحل الأمثل باستخدام طريقة العنصر الأقل كلفة فقط، كيف؟

س10: ما هو دور نماذج النقل في تخطيط الإنتاج.

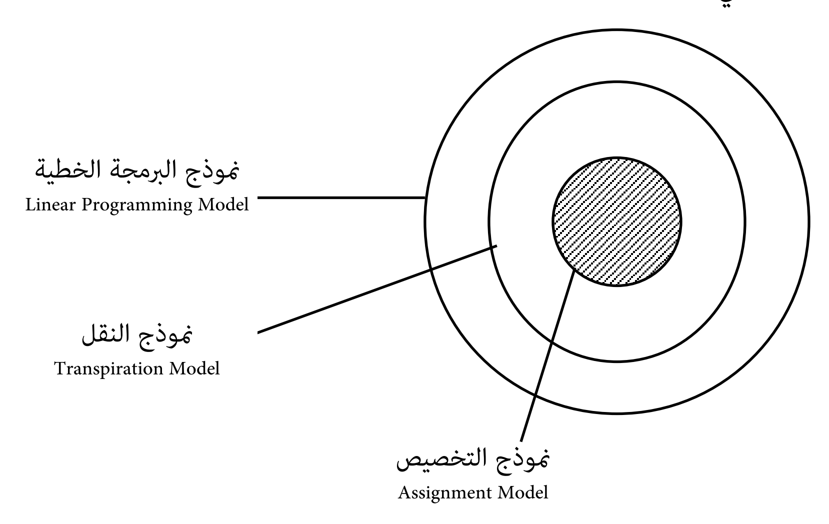
الفصل السابع

نموذج التخصيص

الفصل السابع
نمــــــوذج التخصيص
Assignment Model

1.7 فكرة نموذج التخصيص

وهو أسلوب مشتق من نموذج النقل السابق، ويعتبر مـن الـنماذج المتخصصـة ذات الاستخدامات الواضحة والمحددة، وتعود هـذه الـنماذج (مـع نمـاذج النقـل) بالأسـاس إلى نموذج البرمجة الخطية، بحيث أن العلاقة بين هذه الـنماذج الـثلاث يمكـن توضـيحها مـن خلال الشكل التالي:



يمكن تعريف أسلوب التخصيص بأنه أداة أو وسيلة رياضية تستخدم لخدمة متخـذ القرار في المنشأة من أجل الحصول على مجموعة بدائل من التخصيصات التـي تـؤدي إلى تعظيم العوائد وذلك من خلال ضغط التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن.

إن هكذا نوع من النماذج الرياضية يعتمد على مبدأ الكلفة الفرضية Opportunity Cost الذي سبق وأن تم استخدامه في نماذج النقل التقليدية، وبالتحديد يقوم عليها هكذا مبدأ هو أن كلفة اختيار واتخاذ قرار معين من بين مجموعة قرارات أو بدائل يستوجب التضحية بالفرص البديلة مقابل اختيار ذلك القرار.

إن لنماذج التخصيص تطبيقات مختلفة في الواقع العملي لمنظمات الأعمال أو المنشآت المختلفة، نذكر أدناه أهمها، كما يلي:

1- تخصيص وتوزيع المدراء على المشاريع أو الفروع.
2- توزيع الباعة أو الوكلاء والمعتمدين في عملية نقل وتسويق البضائع على المحافظات المختلفة.
3- تخصيص وتحديد الباصات اللازمة لنقل العاملين وما شابه ذلك.

2.7 النموذج الرياضي لأسلوب التخصيص

إن النموذج الرياضي الذي يستخدم في أسلوب التخصيص يتميز بمواصفات معينة، يمكن إجمالها على النحو التالي:

من متطلبات استخدام أسلوب التخصيص أن تكون البيانات اللازمة لتطبيق النموذج الرياضي معدة في إطار مصفوفة يكون فيها عدد الصفوف مساوياً لعدد الأعمدة (أي أن m=n) وبعبارة أخرى يجب أن يكون عدد الوسائل Agents مساوياً لعدد المهام Tasks.

1- يتم تخصص وسيلة واحدة لمهمة واحدة، وكذلك يتم تخصيص مدير واحد لمشروع واحد، ويتم عادة التعبير عن ذلك بصيغة (one-to-one).
2- إن المعطيات الخاصة بعملية التخصيص ترتبط بشكل أو بآخر بالأعداد الصحيحة، بعبارة أخرى أن قيمة المتغير الأساسي Xij لا يمكن أن يكون أعداد كسرية، وهو عادة يساوي أما (1) أو صفر (0) أي أن:

$$Xij = \begin{cases} 0 \\ \text{أو} \\ 1 \end{cases}$$

وتعبير عن ذلك عادة من خلال شرط اللاسلبية، أي أن:

$$Xij = \geq 0$$

ويتم تفسير قيمة المتغير Xij على أساس ما يلي:

Xij ⇐ (0) يعني لا تتم عملية التخصيص.

Xij ⇐ (1) يعني تتم عملية التخصيص.

أن تكاليف التخصيص يرمز لها بالرمز (Cij)، وهي تعني تخصيص (i) من الوسائل لإنجاز (j) من المهام. حيث أن:

i= 1,2,…,m

j= 1,2,…,n

وعليه يمكن التعبير عن الصيغة الرياضية لمصفوفة التكاليف على النحو التالي:

		1	2	3	Tasks المهام	n	
Agents الوسائل	1	C_{11}	C_{12}	C_{23}	………..….	C_1n	1
	2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	………..….	C_2n	1
	3	C_{32}	C_{32}	C_{33}	………..….	C_3n	1
		⋮	⋮	⋮		⋮	
		Cm_1	Cm_2	Cm_3	………..….	Cmn	

واستناداً إلى ما تقدم يمكن صياغة النموذج الرياضي لأسلوب التخصيص كما يلي:

أولاً: القيود Constraints

1- قيد المهام Tasks

$$\sum_{j=1}^{n} xij = 1 \qquad i = 1,2,..., m$$

2- قيد الوسائل Agents

$$\sum_{i=1}^{m} xij = 1 \qquad j = 1,2,..., n$$

حيث أن:

$$Xij \geq 0$$

وأن:

$$Xij = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

ثانياً: دالة الهدف Objective

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} cij \;\; xij \rightarrow \; Min$$

3.7 طرق حل مشاكل التخصيص

بعد أن يتم التعويض عن المجاهيل في النموذج الرياضي لمشكلة التخصيص، تبدأ بعد ذلك عملية حل نموذج المشكلة باستخدام عدد من الطرق المتاحة لهذا الغرض، وهذه الطرق هي كما يلي:

1- طريقة البرمجة الخطية/ النقل.

2- طريقة التوافيق المختلفة.

3- الطريقة الهنكارية.

وفيما يلي توضيح لكيفية تطبيق هذه الطرق في حل النموذج الرياضي الخاص بمشكلة التخصيص.

أولاً: طريقة البرمجة الخطية /نموذج النقل

تستخدم البرمجة الخطية لحل هكذا أنواع من المشاكل، حيث يمكن اعتماد أحد طرق الحل المعتمدة في البرمجة الخطية وذلك مثل الطريقة المبسطة Simplex Method لحل النموذج الرياضي الخاص بمشكلة التخصيص، إلا أن الشائع في هذه الحالة هو اللجوء إلى أحد طرق الحل المعتمدة في نموذج النقل التي سبق توضيحها في الفصول السابقة، وذلك مثل:

1- طريقة الركن الشمالي العربي.

2- طريقة العنصر الأقل كلفة.

وذلك لأن صياغة النموذج الرياضي الخاص بمشكلة التخصيص تسمح بتطبيق هكذا طرق. ويمكن توضيح ذلك كما في المثال التالي:

مثال رقم ❶

منشأة تجارية قررت افتتاح ثلاثة معارض تجارية لها في مواقع جغرافية مختلفة، وتم تعيين في كل معرض جديد مختص لإدارة شؤون المعرض المذكور. إن لكل مدير كلفة معينة مرتبطة بذلك الموقع، يمكن توضيحها من خلال الجدول التالي:

المعارض / المدراء		المعارض التجارية			ai
		(1)	(2)	(3)	
الوسائل Agents	A.	2	4	3	1
	B.	2	6	5	1
	C.	7	2	1	1
	bj	1	1	1	3 / 3

المطلوب:

استخدام طريقة البرمجة الخطية/ وبالتحديد أحد طرق الحل المستخدمة في نموذج النقل لمعاجلة هذه المشكلة، بحيث يتم تخصيص المدراء الثلاث في المعارض التجارية المذكورة أعلاه.

الحل:

من أجل تطبيق طرق الحل المستخدمة في نموذج النقل، نبدأ أولاً بصياغة النموذج الرياضي للمشكلة في ضوء البيانات المتوفرة في الجدول الوارد ذكره أعلاه وذلك كما يلي:

أولاً: القيود Constraints

1- قيود الوسائل المتاحة (المدراء)، وتكون عادة بهيئة صفوف تكتب كما يلي:

1. $X_{11} + X_{12} + X_{13} = 1$
2. $X_{21} + X_{22} + X_{23} = 1$
3. $X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$

2- قيود المهام المطلوب إيجادها، وتكون عادة تهيئة المحددة وتكتب كما يلي:

1. $X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$
2. $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1$
3. $X_{13} + X_{23} + X_{33} = 1$

ثانياً: دالة الهدف Objective Function

$$Z = 2X_{11} + 4X_{12} + 3X_{13} + 2X_{21} + 6X_{22} + 5X_{23} + 7X_{31} + 2X_{32} + X_{33} \rightarrow Min$$

ثالثاً: قيود اللاسلبية Non-negativity Constraints

$$Xij \geq 0$$

$$Xij \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

الحل:

إن حل هكذا نوع مشكلة هو طرق الحل المعروفة في نمـوذج النقـل، يمكـن أن يـتم كما يلي:

أولاً: الحل بطريقة الركن الشمالي الغربي

المعارض / المدراء	(1)	(2)	(3)	
A.	2 / 1	4	3	ɫ / 0
B.	2	6 / 1	5	ɫ / 0
C.	7	2	1 / 1	ɫ / 0
bj	ɫ / 0	ɫ / 0	ɫ / 0	3 / 3

$Z= 2X_1 + 6X_1 + 1X_1 \Rightarrow 9$ وحدة نقدية

وهو يعين تعيين المدير .A في المعرض رقم (1) والمدير .B في المعرض رقم (2). والمـدير .C في المعرض رقم (3). وأن هكذا أنواع من القرارات سـوف تكلـف إدارة المنشـأة التجـارة وحدة نقدية.

ثانياً: الحل بطريقة العنصر الأقل كلفة

إن العنصر الأقل كلفة هو $C_{33}=1$

وهو يعني تعيين .C في المشروع رقم (3) $\therefore X_{33} = 1$

العنصر الأقل كلفة هو $C_{11}=2$

وهو يعني تعيين .A في المشروع رقم (1) $\therefore X_{11} = 1$

العنصر الأقل كلفة هو $C_{22}=6$

وهو يعني تعيين .B في المشروع رقم (2) $\therefore X_{22} = 1$

وبذلك يصبح جدول التخصيص كما

المعارض / المدراء	(1)	(2)	(3)	
A.	2 1	4	3	1
B.	2	6 1	5	1
C.	7	2	1 1	1
bj	1	1	1	3 / 3

وهو نفس التخصيص الذي تم ا لتوصل إليه باستخدام طريقة الركن الشمالي الغـربي حيث كانت تكاليف النقل الكلية (9) وحدة نقدية.

ثانياً: طريقة التوافيق المختلفة Different Combination

إن هذه الطريقة، تعتبر مـن الطـرق البسـيطة لكونهـا لا تحتـاج إلى تكتيـك ريـاضي متقدم، بل تعتمد على عملية ترتيب رياضية قائمة على أساس حساب الاحتمالات الممكنة لعملية التخصيص. وبعبارة أخـرى تعتمـد هـذه الطريقـة عـلى عـدد المـرات التـي يمكـن بموجبها التوفيق بين البدائل، وتحسب هذه البدائل طبقاً لقاعدة رياضية يطلق عليها:

مفكوك (i) Factorial حيث على سبيل المثال:

(!) 3 = 3× 2×1 = 6

(!) 4 = 4× 3 × 2×1 = 24

وهذا يعني أنه لو كان لـدينا مصـفوفة بيانـات تتكـون مـن ثلاثـة صـفوف وثـلاث أعمدة، فإن ذلك يعني إننا أمام (6) حالات توفيقية لتكوين بدائل مختلفة. ولو كان لـدينا مصفوفة بيانات تتكون من أربعة صفوف وأربعة أعمدة، فإن ذلـك يعنـي إننـا أمـام (24) حالة توفيقية أو احتمال وهكذا. وفيما يلي مثال لتوضيح هذه الطريقة.

مثال رقم ❶

ثلاثة مدراء مطلوب توزيعهم على ثلاثة مشاريع وكانت تكاليف التعيين أو التخصيص المشاريع في كل واحد من هذه المشاريع هي كما يلي:

i \ j	(1)	(2)	(3)
A.	9	13	7
المدراء B.	14	14	6
C.	10	13	8

المطلوب:

إنجاز عملية التخصيص أو التعيين بحيث تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن.

الحل:

لما كان عدد الصفوف وعدد الأعمدة هو ثلاث، أي أن (m=n=3) فإن ذلك يعني أن:

عدد بدائل الحلول Factorial (i) 3=3 × 2×1 = 6

رقم البديل	توزيع المدراء على المشاريع			تراكم الكلف	التكاليف الكلية
	(1)	(2)	(3)		
1.	A.	B.	C.	9+14+8	31
2.	A.	C.	B.	9+13+6	28
3.	B.	A.	C.	14+13+8	35
4.	B.	C.	A.	14+13+7	34
5.	C.	A.	B.	10+13+6	29
6.	C.	B.	A.	10+14+7	31

وهذا يعني أن البديل الثاني هو الأفضل، والذي بموجبه ينبغي تعيين المدير .A للمشروع (1)، والمدير .C تعيين في المشروع رقم (2) والمدير B تعيين في المشروع رقم (3)، ولذلك تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن.

ثالثاً: الطريقة الهنكارية Hungarian Method

إن فكرة هـذه الطريقـة تعتمـد عـلى مبـدأ تخفـيض المصـفوفة الخاصـة بالبيانـات المتعلقة بالمشكلة، بحيث أن طرح رقم معين من صفوف أو من أعمدة المصـفوفة، يـؤدي ذلك إلى خلق ما يسمى بمصفوفة الكلف الفرصية Opportunity Cost. إن الغرض من عمليـة الطرح هذه هو إيجاد قيم صفرية في كل صف وكل عمـود، وإذا تحقـق هـذا المبـدأ فـإن ذلك يعني أن الحل الأمثل يمكن تحقيقه. لتوضيح فكرة هذه الطريقة نأخذ مثال تطبيقي على ذلك.

مثال رقم ❶

لغرض مقارنة نتـائج هـذه الطريقـة مـع الطريقـة السـابقة نفـرض أن لـدينا نفـس البيانات السابقة، وعليه فإن الحل يتم وفق الخطوات التالية:

1- تحديد أصغر القيم في كل صف من صفوف المشاريع:

مصفوفة رقم (1)

i \ j	(1)	(2)	(3)
A.	9	13	7
المدراء B.	14	14	6
C.	10	13	8

2- تطرح هذه القيمة من بقية القيم في كل صف من الصفوف، وبذلك نحصل على ما يلي:

مصفوفة رقم (2)

i \ j	(1)	(2)	(3)
A.	2	6	0
B.	8	8	0
C.	2	5	0

3- في المصفوفة رقم (2) يتم طرق أقل قيمة من كل عمود من بقية القيم الواردة في نفس العمود ومن ثم يتم رسم مستقيمات عمودية وأخرى أفقية لتغطية الرقم الصفرية كما هو واضح أدناه:

مصفوفة رقم (3)

i \ j	(1)	(2)	(3)	
A.	2	6	0	2
B.	8	8	0	
C.	2	5	0	1
			3	

ومن الجدير بالذكر هنا أن عدد المستقيمات الأفقية والعمودية ينبغي أن يكون مساوياً لعدد الصفوف أو الأعمدة، فإذا كان الأمر كذلك، فإن ذلك يعني أننا على وشك أن نحصل على الحل الأمثل، في حين أن بقاء قيمة صفرية غير مغطاة يعني أن الحل الأمثل لن يتم الحصول وينبغي الاستمرار بعملية الطرح من أجل خلق قيم صفرية جديدة.

وفقاً لهذه الطريقة، إن القاعدة في عملية توزيع المدراء على المشاريع هي يعين أولاً ذلك المدير الذي يقابل أقل عدد من القيم الصفرية، واستناداً إلى البيانات الواردة في المصفوفة رقم (3)، فإن المفروض في البداية تعيين المدير B في المشروع رقم (3) لكونه يقابل قيمة صفرية واحدة. وبهذا يتم شطب الصف الثاني والعمود الثالث. وبموجب هذا الإجراء يصبح المدير .A يقابل قيمة صفرية واحدة، لذلك يعين المشروع رقم (1). وبقي لدينا المدير .C فهو إذاً سوف يتعين من المشروع رقم (2). وعلى أساس ما قدم فإن التكاليف الكلية لقرارات التخصيص أو التعيين هذه كما يلي:

المدير .A	$\Rightarrow$	المشروع (1)	9
المدير .B	$\Rightarrow$	المشروع (3)	6
المدير .C	$\Rightarrow$	المشروع (2)	13
		وحدة نقدية	28

وهو نفس الرقم الذي يتم الحصول عليه في الطريقة السابقة.

4.7 نموذج التخصيص أو التوزيع مع وجود شروط إضافية

من الفقرات السابقة لاحظنا أن هناك أكثر مـن طريقـة يـتم بموجبهـا حـل مشـكلة التخصيص أو التوزيع، وتعتبر الطريقة الهنكارية من أهم الطرق السابقة[1]، حيث لاحظنـا أن القاعدة الأساسية التي تعمل على أساسها هذه الطريقـة هـي (كـما في طريقـة الصـفر الأقل كلفة) إيجاد المصفوفة الصفرية، إن الحل الأمثل بموجب هذه الطريقة يتم الحصول عليه فيما لو تـم تغطيـة كافـة الأصـفار التـي تظهـر في الصـفوف أو الأعمـدة بعـدد مـن المسـتقيمات يسـاوي عـدد الصـفوف أو الأعمـدة. وفي حالـة تغطيـة القـيم الصـفرية بمستقيمات أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة أو عدم تغطية أحـد القـيم الصـفرية، فـإن ذلك يعني أن الحل الذي تم الحصول عليه ليس بالحل الأمثل. وهذا الأمر يتطلب إدخـال شروط إضافية أو تعديلات من أجل الحصـول عـلى الحـل الأمثـل. لتوضـيح هـذه الفكـرة سوف نعتمد أدناه أحد الأمثلة التطبيقيـة المسـتمدة مـن الواقـع العمـلي لأحـد المنشـآت الإنتاجية.

مثال رقم ❶

في أحد المنشآت الإنتاجية يوجد أربعة من المهندسين، مطلوب توزيعهم عـلى أربعـة مواقع إنتاجية التكاليف المرتبطـة بعمـل هـؤلاء المهندسـين في المواقـع الإنتاجيـة الأربعـة موضحة من خلال الجدول التالي:

المهندسين	مواقع الإنتاج أو العمل			
	1	2	3	4
1	420	480	240	360
2	480	420	300	360
3	420	540	300	420
4	360	480	360	480

(1) **نسبتاً إلى العالم الرياضي الهنكاري** (Denes Konig).

المطلوب:

ما هي خطة توزيع أو تخصيص هؤلاء المهندسين على مواقع الإنتاج، بحيث تكون التكاليف الكلية لعملية التخصيص أقل ما يمكن:

الحل:

من أجل حل هذه المشكلة، نضع أدناه القيود التي تحكم المهندسين والتي تحكم مواقع العمل وذلك كما يلي:

$$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}=\sum_{j=1}^{4}x_1j=1$$
$$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}=\sum_{j=1}^{4}x_2j=1$$
$$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}=\sum_{j=1}^{4}x_3j=1$$
$$X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}=\sum_{j=1}^{4}x_4j=1$$

أي مهندس ممكن أن يشغل موقع عمل واحد

$$X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}=\sum_{i=1}^{4}xi_1=1$$
$$X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}=\sum_{i=1}^{4}xi_2=1$$
$$X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}=\sum_{i=1}^{4}xi_3=1$$
$$X_{14}+X_{24}+X_{34}+X_{44}=\sum_{i=1}^{4}xi_4=1$$

أي مهندس يمكن أن يشغل من قبل مهندس واحد

إن دالة الهدف هي:

$$F(xij) = 420X_{11} + 480X_{12} + 240X_{13} + 360X_{14}+$$
$$480X_{21} + 420X_{22} + 300X_{23} + 360X_{24}+$$
$$420X_{31} + 540X_{32} + 300X_{33} + 420X_{34}+$$
$$360X_{41} + 480X_{42} + 360X_{43}+ 480X_{44} \rightarrow Min.$$

حيث أن:

$x_{ij}=1$ يعني تعيين المهندس في موقع الإنتاج.

$x_{ij}=0$ موقع الإنتاج يبقى شاغراً.

الخطوة الأولى في عملية الحل هو سحب مصفوفة التكاليف، وكما يلي:

$$\begin{bmatrix} 420 & 480 & 240 & 360 \\ 480 & 420 & 300 & 360 \\ 420 & 540 & 300 & 420 \\ 360 & 480 & 360 & 480 \end{bmatrix}$$

بعد ذلك يتم إيجاد قيمة صفرية في كل صف وكل عمود وتغطيتها بالمستقيمات وكما يلي:

$$\begin{bmatrix} 180 & 120 & 0 & 60 \\ 180 & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 120 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (2) \\ \\ (3) \end{matrix}$$

من المصفوفة أعلاه يتضح أن عدد المستقيمات هو أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة، وهذا يعني إننا لم نحصل على الحل الأمثل، وعلى هذا الأساس يتطلب الأمر اللجوء إلى الإجراء التالي:

1- تحديد أقل عنصر لم يتم تغطيتها بمستقيمات.
2- يطرح هذا العنصر من العناصر التي لم تشطب.
3- يضاف إلى العنصر الذي شطب مرتين.

ويتضح من المصفوفة أعلاه أن أقل عنصر لم يشطب هو 60 وعند تنفيذ

$$\begin{array}{ccccc} & (3) & (2) & (1) & \\ 120 & 60 & 0 & 0 & \\ 180 & 0 & 60 & 0 & \\ 60 & 60 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 60 & 60 & (4) \end{array}$$

إن المصفوفة الحالية توضح أن المستقيمات الأربعة تم بموجبها تغطية كافة الأصفار، وطالما أن المصفوفة تكون في أربعة صفوف أو أعمدة، فإن ذلك يعني أن الحل الأمثل قد تم الحصول عليه. ومن الجدير بالذكر هنا أن المصفوفة الأخيرة هي القاعدة الأساس للحصول على الحل الأمثل. وعملية التخصيص أو التوزيع هنا يمكن أن تكون على أساس اثنين من البدائل وذلك لأشغال أي من القيم الصفرية التي ترد في كل صف بالمقدار (1) وهذا الأمر لن يغير من الحل الأمثل الذي سوف يتم الحصول عليه في النهاية، وبناءاً على ما تقدم سوف يكون لدينا اثنين من المصفوفات التي توضح بدائل الحل الأمثل:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وأن قيمة دالة الهدف هي:

$F(x_1) = 240 + 420 + 420 + 360 = 1440$

$F(x_2) = 360 + 420 + 300 + 360 = 1440$

طبقاً للمصفوفة الأولى (x1) فإن:

- المهندس (1) عليه أن يشغل الموقع رقم 3.
- المهندس (2) عليه أن يشغل الموقع رقم 2.
- المهندس (3) عليه أن يشغل الموقع رقم 4.
- المهندس (4) عليه أن يشغل الموقع رقم 1.

وإن التكاليف الكلية لهكذا نوع من قرارات التخصيص والتوزيع سوف تكلف 1440 وحدة نقدية.

وطبقاً للمصفوفة الثانية (x_2) فإن:

- المهندس (1) عليه أن يشغل الموقع رقم 4.
- المهندس (2) عليه أن يشغل الموقع رقم 2.
- المهندس (3) عليه أن يشغل الموقع رقم 3.
- المهندس (4) عليه أن يشغل الموقع رقم 1.

وأن التكاليف سوف تكون ذاتها وهو 1440 وحدة نقدية.

وفي النهاية لا بد وأن نشير إلى الملاحظات التالية بخصوص هذه الطريقة:

1- إنها مخصصة لحل مشاكل التدنية (.Min) فقط.

2- بخصوص حالات التعظيم (.Max) يتطلب الأمر تحوير مصفوفة البيانات بحيث يكون لها معنى معكوس، على سبيل المثال تضرب في (-1) ومن ثم تطرح من أكبر قيمة بقية القيم الواردة في الصف أو في العمود.

3- في الواقع العملي، قد لا يكون فيه عدد العاملين يساوي عدد مواقع العمل وبالتالي سوف لا نحصل على مصفوفة رباعية يكون لها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة، وهنا ينبغي معالجة الحالة من خلال اعتماد صف أو عمود وهمي (وهو يعني عامل وهمي أو موقع عمل وهمي)، ويتم التعبير عن ذلك على أساس أن aij=0.

4- في الواقع العملي قد تكون هنالك حالة يكون فيها أحد البدائل الواردة في عملية التخصيص أو التوزيع غير ممكنة ولا بد من استبعادها من عملية الحل، ولهذا فإن في هذه الحالة يتم اتخاذ إجراء مشابه لما هو وارد سابقاً في حالة البرمجة الخطية/ طريقة M-Tchnique، حيث يتم إدخال المقدار M باعتباره كمية كبيرة جداً على أحد القيم، بحيث أن طرح أي كمية منها مهما كانت كبيرة أن يكون الناتج صفراً.

الأمثلة التالية توضح هذه الحالات.

مثال رقم ❶

البيانات الواردة في الجدول التالي تتعلق بتعيين ثلاثة عمال فنيين من أربعة مواقع عمل وتمثل الربح المتوقع من قيام كل عامل بعمله:

العاملين	مواقع العمل			
	1	2	3	4
A	10	7	6	8
B	12	14	10	17
C	3	5	8	4

وقد أخذ بعين الاعتبار أن بالإمكان اختيار عامل من داخل المنشأة لشغل الموقع الرابع.

المطلوب: تنفيذ عملية التخصيص بحيث تكون الأرباح الكلية أعلى ما يمكن.

الحل:

في البداية يتطلب الأمر القيام ببعض الإجراءات لأجل تسهيل عملية الحل، وذلك مثل:

1- يتم إدخال صف جديد بقيم صفرية وذلك كما يلي:

$$\begin{array}{r} \text{A.} \\ \text{B.} \\ \text{C.} \\ \text{(Dummy)}\quad \text{D.} \end{array}\begin{bmatrix} 10 & 7 & 6 & 8 \\ 12 & 14 & 10 & 17 \\ 3 & 5 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2- ولما كانت المصفوفة الأصلية هي مصفوفة أرباح، لذلك لا بد من تحويرها، ويكون ذلك بطرح من أكبر القيم ($a_{24}=17$) كل القيم الأخرى في المصفوفة، بحيث نحصل في النهاية على المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 & 11 & 9 \\ 5 & 3 & 7 & 0 \\ 14 & 12 & 9 & 13 \\ 17 & 17 & 17 & 17 \end{bmatrix}$$

إن هكذا مصفوفة يمكن تفسيرها على أنها تعبر عن مقدار الخسائر أو الكلف التي يمكن أن تلحق بالمنشأة لو تمت عملية التخصيص وذلك بالقياس إلى أعلى ربح يمكن الحصول عليه (17). أما بالنسبة للصيغة الرياضية لهكذا مشكلة فإنها يمكن أن تكون كما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{4} x_1 j = 1 \\ \sum_{j=1}^{4} x_2 j = 1 \\ \sum_{j=1}^{4} x_3 j = 1 \\ \sum_{j=1}^{4} x_4 j = 1 \end{array}\right]$$

أي عامل يجب أن يشغل موقع واحد فقط

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{4} xi_1 = 1 \\ \sum_{i=1}^{4} xi_2 = 1 \\ \sum_{i=1}^{4} xi_3 = 1 \end{array}\right]$$

في أي موقع يجب أن يشغل من قبل عامل واحد فقط

$$\sum_{i=1}^{4} xi_4 = 1$$

$$xij \geq 0 \qquad (I = 1,2,3,4; \quad j = 1,2,3,4)$$

وأن دالة الهدف هي:

$$\begin{array}{lllll} F(xij) = 7X_{11} & + 10X_{12} & + 11X_{13} & + 9X_{14} + \\ 5X_{21} & + 3X_{22} & + 7X_{23} & + 0X_{24} + \\ 14X_{31} & + 12X_{32} & + 9X_{33} & + 13X_{34} + \\ 17X_{41} & + 17X_{42} & + 17X_{43} & + 17X_{44} \rightarrow \text{Min.} \end{array}$$

الخطوة التالية هو تطبيق الطريقة الهنكارية بشكل مباشر حيث يتم طرح أقل قيمة من بقية القيم في الصف، وعندها نحصل على ما يلي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

يلاحظ في المصفوفة: يمكن تغطية الأصفار بأربعة مستقيمات وهي مساوية لعدد الصفوفة أو الأعمدة.

وعلى هذا الأساس فإن الحل الأمثل يتمثل في المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ويعني ذلك ما يلي:

العامل A يعين في الموقع رقم (1).

العامل B يعين في الموقع رقم (4).

العامل C يعين في الموقع رقم (3) .

العامل الداخلي يعين في الموقع رقم (2).

وبذلك تكون الأرباح الكلية هي:

وحدة نقدية 35 = 8 + 17 +10

5.7 استخدام نماذج التخصيص في تخطيط الإنتاج

من مشكلة التخصيص يمكن أن نستنبط عدد من المشاكل الفرعية التي تركز على نفس المفاهيم السابقة الذكر من حيث تحديد وتخصيص الوسائل لإنجاز الأعمال. من الاستخدامات المهمة لهذا الأسلوب هو معالجة مشاكل تخطيط الإنتاج، وخاصة ما يتعلق منها بتوزيع المهام الإنتاجية بين مواقع الإنتاج، مع الأخذ بنظر الاعتبار مؤثرات القرار التالية:

1- تقليل تكاليف المواد أو وقت العمل التي ترتبط بهذه المهام الإنتاجية.
2- تعظيم الإنتاجية من حيث زيادة الكميات المنتجة أو قيمة هذه الكميات المنتجة.

وبشكل عام يتوقف صياغة النموذج الرياضي على طبيعة العوامل الداخلة فيه وما هي مؤشرات القرار التي أخذت بعين الاعتبار، وعلى هذا الأساس يمكن تقسيم نماذج التخصيص كما سيرد أدناه:

1.5.7 توزيع العمليات الإنتاجية بين مواقع الإنتاج

يتم تفسير وتوضيح هكذا نوع من النماذج على أساس ما يلي:
إذا كان لدينا ما يلي:
N ⇐ من العمليات الإنتاجية (المنتجات).
P ⇐ مواقع الإنتاج (معامل، مواقع عمل، مكائن)

وإن المطلوب توزيع وتخصيص n من العمليات الإنتاجية (المنتجات) بين p من مواقع الإنتاج (معامل، مواقع عمل، مكائن)، حيث يتوقف قرار التخصيص هنا على طبيعة ومواصفات المعامل aij. وبشكل عام هكذا نوع من النماذج الرياضية يمكن حلها عن طريق العودة إلى طرق الحل المعتمدة في البرمجة الخطية ومن أهمها طريقة السمبلكس Simplex Method على افتراض أن عدد متغيرات القرار في هكذا حالة يساوي NXP. وفي هذا الصدد يرد اثنين من النماذج التي توضح تفاصيل تتعلق بالكيفية التي يمكن أن تتم عمليات توزيع العمليات الإنتاجية بين مواقع الإنتاج، وهذه النماذج هي كما يلي:

النموذج رقم (1) Model No.1

1- إنتاجية المواقع معلومة عند طرح كل نوع من المنتجات.
2- حجم الإنتاج محدد في كل موقع عمل.
3- على الأغلب خطط الإنتاج في كل فترة يمكن أن تكون معلومة.

إن هكذا نوع من النماذج الرياضية في موضوع التخصيص، يقوم على أساس تعاريف ورموز معينة مقدما وهي كما يلي:

Aij = الإنتاجية الخاصة بالموقع (i) عند طرح (j) من المنتجات

Cj = حجم الإنتاج المحدد من النوع (j)

حيث أن: j= 1,2,…,N

Bi = مقدار وقت العمل المتاح للموقع (i)

حيث أن: i=1,2,…,P

وتقوم فكرة هذا النموذج (وبالاعتماد على ما ورد أعلاه من تعاريف) على توزيع مهام طرح أنواع المنتجات بين مواقع الإنتاج المختلفة، وذلك من أجل بلوغ الأهداف المطلوبة ومنها على سبيل المثال تدنية وقت العمل أو تكاليف الإنتاج. وقد يكون الهدف المطلوب هو تعظيم أحد مؤشرات الإنتاجية مثل رفع وزيادة قيمة الإنتاج أو حجم الإنتاج، وإذا كانت الإنتاجية لكل وحدة زمن معلومة، فإن عملية التوزيع أو التخصيص، تعتمد على تحديد قيمة المتغير الأساسي التالي:

Xij = وقت العمول المصروف في موقع الإنتاج (i) وذلك عند طرح (j) من المنتجات.

وعلى هذا الأساس فإن وقت العمل المصروف (xij) ينبغي أن يكون مساوياً أو أقل من ما هو متاح (bi) أي أن:

$$x_{11}+x_{12}+\dots x_{1N}=\sum_{j=1}^{N}x_1j\ \le B_1$$

$$x_{21}+x_{22}+\dots x_{2N}=\sum_{j=1}^{N}x_2j\ \le B_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_{P1}+x_{P2}+\dots x_{PN}=\sum_{j=1}^{N}x_Pj\ \le B_P$$

إضافة إلى ما تقدم فإن من المفروض أن يتم طرح ما هو مخطط ومطلوب من حجم الإنتاج، أي أن:

$$a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+\dots+a_{p_1}x_{p_1}=\sum_{i=1}^{p}ai_1xi_1\ \ge\ C_1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{1N}x_{1N}+a_{2N}x_{2N}+\dots+a_{p_N}x_{p_N}=\sum_{i=1}^{p}ai_Nxi_N\ge C_N$$

حيث أن:

$$Xij\ge 0$$

(i=1,2,…,p , j=1,2,…,N)

أما بخصوص دالة الهدف فإنها تبحث عن أقل مقدار ممكن من وقت العمل في كافة مواقع الإنتاج ولكافة المنتجات، أي أن:

$$F(xij)=x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1N}+\dots+x_{p_1}+x_{p2}+\dots+x_{pN}$$

$$F(xij)=\sum_{i=1}^{P}\ \sum_{j=1}^{N}xij\ \to\ Min.$$

النموذج رقم (2) Model No.2

وقت العمل معلوم في كل موقع عمل وذلك عند طرح الأنواع المختلفة من المنتجات.

1- خطط الإنتاج في كل فترة معلومة.
2- على الأغلب حجم الإنتاج يمكن أن يكون محدد في كل موقع عمل.
3- إن هكذا نوع من النماذج الرياضية في موضوع التخصيص، يقوم على أساس تعاريف ورموز معينة مقدما وهي كما يلي:

A_{ij} = وقت العمل في الموقع (i) عند طرح (j) من المنتجات.

C_j = حجم الإنتاج من النوع (j)

حيث أن: $j= 1,2,\ldots,N$

B_i= مقدار وقت العمل المتاح للموقع (i)

حيث أن: $i= 1,2,\ldots,p$

وعلى أساس هذه المعلومات فإن المطلوب هو توزيع مهام طرح أنواع المنتجات بين مواقع الإنتاج المختلفة من أجل بلوغ الأهداف المطلوبة مثل وقت العمل أو تكاليف الإنتاج، وقد يكون الهدف المطلوب هو تعظيم أحد مؤشرات الإنتاجية مثل رفع وزيادة قيمة أو حجم الإنتاج.

وإذا كان وقت العمل المطلوب لكل وحدة إنتاج، فإن عملية التخصيص أو التوزيع تعتمد على تحديد قيمة متغير الأساس، وهو:

X_{ij}= مقدار المنتجات من النوع (j) التي ينبغي طرحها في الموقع (i).

وعلى هذا الأساس فإن حاصل جمع مقدار وقت العمل (aij) بالنسبة لكل مقدار من المنتجات (xij) في مواقع العمل (i) ينبغي أن لا يتجاوز ما هو متاح من الوقت، أي أن:

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1N}x_{1N} \leq B_1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{P1}x_{P1} + a_{P2}x_{P2} + \ldots + a_{PN}x_{PN} \leq B_r$$

إضافة إلى ما تقدم فإن من المفروض أن يتم طرح ما هو مخطط ومطلوب من حجم الإنتاج، أي أن:

$$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{p1} = \sum_{i=1}^{p} xi_1 \geq C_1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$x_{1N} + x_{2N} + \ldots + x_{pN} = \sum_{i=1}^{p} xi_N \geq C_N$$

حيث أن:

$Xij \geq 0$

(i= 1,2,…,p), j=1,2,…,N)

أما دالة الهدف فهي تبحث عن أكبر مجموع قيمة ممكنة للإنتاج، حيث أن (cij) يمثل سعر المنتجات، ويتم التعبير عنها كما يلي:

$$F(xij) = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + \ldots + C_{1B}x_{1N} + \ldots + C_{P1}x_{P1} + C_{p2}x_{p2} + \ldots + C_{PN}x_{pN}$$

$$F(xij) = \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{N} Cij\, xij \rightarrow \text{Max.}$$

ويمكن أن تكون الدالة تبحث عن أقل مجموع ممكن لوقت العمل في كافة مواقع العمل ولكافة المنتجات، ويتم التعبير عن هذه الدالة كما يلي:

$$F(xij) = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + ... + a_{1N}x_{1N} + ... + a_{P1}x_{P1} + a_{p2}x_{p2} + ... + a_{PN}x_{pN}$$

$$F(xij) = \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{N} aij\, xij \rightarrow Min.$$

لتوضيح فكرة النماذج الوارد ذكرها أعلاه نأخذ أدناه أمثلة تطبيقية مختلفة.

مثال رقم ❶

إحدى المنشآت الإنتاجية تطرح منتجات صناعية معينة. ومن أجل إتمام عملية الإنتاج تحتاج هذه المنشأة إلى خمسة أنواع من عناصر إنتاج مكملة، يتم إنتاجها بالاعتماد على ثلاثة مكائن في منشأة إنتاجية أخرى، حيث عملت هذه الأخيرة على تغيير وتحوير خطوطها الإنتاجية لهذا الغرض وتأجيرها للمنشأة الأولى وذلك على أن لا يتجاوز 180 ساعة بالشهر لكل ماكنة.

ويمكن للأجزاء الصغيرة الداخلة في تركيب هذه العناصر أن تنتج على أي ماكنة y على التعيين. ومن الجدير بالذكر هنا أن إنتاجية العمل لكل ماكنة تختص من واحدة إلى أخرى بقدر تعلق الأمر بطرح عناصر الإنتاج المكملة المشار إليها أعلاه، والجدول التالي يوضح البيانات الخاصة بهذه المشكلة.

المكائن	إنتاجية المكائن (قطعة/ ساعة) لعناصر الإنتاج المكملة				
	No.1	No.2	No.3	No.4	No.5
I.	0.80	1.00	0.40	2.00	0.625
II.	0.75	0.60	0.50	1.875	0.60
III.	1.25	1.20	0.375	1.50	0.50

وقد علمت ما يلي:

1 ساعة على الماكنة .I تكلف 30 دينار

1 ساعة على الماكنة .II تكلف 42 دينار

1 ساعة على الماكنة .III تكلف 36 دينار

المطلوب:

تخصيص وتوزيع كميات الإنتاج لعناصر الإنتاج المكملة بين المكائن الثلاث (.I ,.III,II) ، وذلك من أجل إنتاج

على الأقل 90 عنصر من No.1، No.2 ، No.3

على الأقل 75 عنصر من No.4 ، No.5

بحيث تكون تكاليف تأجير المكائن أقل ما يمكن.

الحل:

من الجدول السابق تتضح إنتاجية المكائن لكل وحدة واحدة من عناصر الإنتاج المكملة محسوبة (قطعة/ساعة)، وعلى هذا الأساس ومن أجل توزيع مهام إنتاج العناصر المذكورة بين المكائن، يتطلب الأمر تحديد وقت العمل (بالساعات) لكل (i) ماكنة (I=1,2,3) عند طرح (j) من الأجزاء الصغيرة لعناصر الإنتاج المكملة (j=1,2,...,5) وعليه فإن ذلك يتطلب دفع متغير الأساس (xij) باعتباره إن متغيرات الأساس (xij) ينبغي أن تحقق مجموعتين من القيود، وهي:

أولاً: إن وقت العمل المتاح لكل ماكنة محدود، حيث بالنسبة للماكنة .I وعند إنتاج كافة العناصر المكملة، فإن الوقت ينبغي أن لا يزيد عن 180 ساعة، أي أن:

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} \leq 180$$

ونفس الشيء يقال عن الماكنة .II والماكنة .III

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} \leq 180$$

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} \leq 180$$

ثانياً: إن المهام الواردة في خطط الإنتاج بالنسبة لكل العناصر المكلمة محددة، لذلك فإن على أساس المكائن الثلاث المتوفرة (.III,.II.,I) ينبغي أن يكون مجموع ما مطلوب إنتاجه على الأقل 90 قطعة من العناصر المذكورة، أي أن:

(1) .... $0.8X_{11} + 0.7X_{21} + 1.25X_{31} \geq 90$

(2) .... $1.0X_{12} + 0.6X_{22} + 1.2X_{32} \geq 90$

(3) .... $0.4X_{13} + 0.5X_{23} + 0.375X_{33} \geq 90$

(4) .... $2.0X_{14} + 1.875X_{24} + 1.5X_{34} \geq 75$

(5) .... $0.625X_{15} + 0.6X_{2}5 + 0.5X_{35} \geq 75$

حيث أن:

$Xij \geq 0 \qquad (I=1,2,3\ ,\ j=1,2,\ldots,5)$

إن دالة الهدف تبحث عن أقل تكاليف كلية لوقت عمل المكائن (المؤجرة) أي أن:

$F(xij) = 30\ (X_{11} + X_{12} + 13 + X_{14} + X_{15}) + 42\ (X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25})$

$+ 36\ (X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{3}X) \rightarrow Min.$

وعند تطبيق طريقة السمبلكس، يتم الحصول على الحل الأمثل التالي:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 22.5 & 37.5 & 120 \\ 0 & 0 & 162 & 0 & 0 \\ 72 & 75 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن هذه النتيجة تعني إنتاج الكميات التالية:

$X_{13} = 27.5\ ,\ X_{14} = 37.5\ ,\ X_{15} = 120\ ,\ X_{23} = 162\ X_{31} = 72\ ,\ X_{32} = 75$

وبذلك تكون قيمة دالة الهدف المثلى، هي:

$F(X) = 17496$ (ساعة/ماكنة)

بالإضافة إلى ما تقدم، فإن النتائج الأخرى هي:

1- الماكنة (.I) ينبغي أن تعمل 22.2 ساعة عند إنتاج العناصر No.3
وينبغي أن تعمل 37.5 ساعة عند إنتاج العناصر No.4
وينبغي أن تعمل 100 ساعة عند إنتاج العناصر No.5

2- الماكنة (.II) ينبغي أن تعمل 162 ساعة عند إنتاج العناصر No.3
3- الماكنة (.III) ينبغي أن تعمل 72 ساعة عند إنتاج العناص No.1
وينبغي أن تعمل 75 ساعة عند إنتاج العناصر No.2

وعلى هذا الأساس سوف تكون التكاليف الكية لاستئجار المكائن 17496 دينار شـهرياً، وذلك لأن:

$$180 \times 30 = 5400$$
$$162 \times 42 = 6804$$
$$147 \times 36 = \underline{5292}$$

17496 دينار شهرياً

مثال رقم ❷

لإنتاج خمسة أنواع من عناصر الإنتاج (A,B,C,D,E) يتطلب الأمر تـأجير ثلاثـة مكـائن (III.,II.,I) مع العلم أن الأجزاء الصغيرة لهذه العناصر يمكن أن تنـتج عـلى أي منهـا لا عـلى التعيين، وقد علمت أن كل واحدة من العناصر أعلاه تحتاج إلى وقت يختلف عن العنصر الآخر وكما واضح من الجدول التالي:

المكائن	استهلاك وقت عمل المكائن لإنتاج القطع				
	A	B	C	D	E
I.	75	60	150	30	96
II.	80	100	120	32	100
III.	48	50	160	40	120

المطلوب:

تقسيم الإنتاج الشهري لعناصر الإنتاج بين المكـائن، مـن أجـل إنتـاج عـلى الأقـل 90 قطعة من العناصر C,B,A. وكذلك على الأقل 75 قطعة مـن العنـاصر E,D مـع الأخـذ بنظـر الاعتبار أن تكون التكاليف الكلية لإيجاد المكائن أقل ما يمكن. مـع العلـم أن كـل واحـدة من المكائن السابقة يمكن أن تستأجر لغاية 180 ساعة (800 10 دقيقة) في خـلال شـهر. مـع العلم أن ساعة عمل واحدة للماكنة (.I) تكلف 30 دينار وأن

ساعة عمل واحدة من الماكنة (.II) تكلف 42 دينار، وأن ساعة عمل واحدة من الماكنة (.III) تكلف 36 ساعة.

الحل:

وكما مر معنا في المثال السابق، فإن من المفروض تقسيم المنتجات الخمسة من عناصر الإنتاج بين المكائن بحيث لا يتم تجاوز الوقت المتاح لتشغيل المكائن مع الحصول على ما هو مخطط من عناصر الإنتاج المكملة.

وإذا علمت أن (aij) هو عبارة عن معامل يمثل الاستغلال الحالي لوقت العمل على الماكنة (i) لإنتاج (j) من إجراء عناصر الإنتاج المكملة. وعلى هذا الأساس فإن المتغير الأساس هو:

Xij = كمية الإنتاج من الأجزاء المكملة للإنتاج j (j=1,2,…,5)
يتم ذلك على أساس استغلال المكائن i (i=1,2,3)

إن القيود أو الشروع التي ترتبط بوقت عمل المكائن، هي:

(1) ……….. $75X_{11} + 6X_{12} + 150X_{13} + 30X_{14} + 96X_{15} \leq 10800$

(2) ……….. $80X_{21} + 100X_{22} + 120X_{23} + 32X_{24}\ 100X_{25} \leq 10800$

(3) ………. $48X_{31} + 50X_{32} + 160X_{33} + 40X_{34} + 120X_{35} \leq 10800$

الشروط التي ترتبط بكميات الإنتاج، هي:

(1) ………. $X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 90$

أما بالنسبة لبقية العناصر فهو كما يلي:

(2) ………. $X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 90$

(3) ………. $X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 90$

(4) ………. $X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 75$

(5) ………. $X_{15} + X_{25} + X_{35} \geq 75$

حيث أن:

$Xij \geq 0 \quad (i= 1,2,3 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,5)$

أما دالة الهدف في هذه الحالة فهي تبحث عن تدنية تكاليف عمل المكائن على أساس ما هو محدد مسبقاً من كلفة 1 ساعة عمل، أي أن:

$$F(xij) = 30(75X_{11} + 60X_{12} + 150X_{13} + 30X_{14} + 96X_{15}) + 42(80X_{21}+100X_{22} + 120X_{23} + 32X_{24} + 100X_{25} + 36(48X_{31} + 50X_{32} +40X_{34} + 120X_{35}) \rightarrow Min.$$

الحل الأمثل لهذه المشكلة يتضح من خلال المصفوفة التالية التي يتم الحصول عليها باعتماد البرمجة الخطية (طريقة السمبلكس):

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & 75 & 75 \\ 0 & 0 & 81 & 0 & 0 \\ 90 & 90 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن قيمة دالة الهدف هي:

F (x) = 17496 دينار

وهو يعني أن من المفروض إنتاج على الماكنة (.I) وقطع من أجزاء العناصر .C و 75 قطعة من أجزاء العناصر .D و 75 قطعة من أجزاء العناصر .E.

وعلى الماكنة (.II) ينبغي إنتاج 81 من .C. وعلى الماكنة .III يتم إنتاج 90 قطعة من B,A، وهذا سوف يكون 17496 دينار.

ويمكن استنباط نتائج أخرى بالإضافة إلى ما تقدم، حيث على سبيل المثال، أن على الماكنة (.I) يتم استغلال مقدار من وقت العمل لإنتاج .C ويحسب كما يلي:

$150 \times 9 = 1350$ دقيقة

ويساوي 22.5 ساعة.

ولإنتاج .D يحسب كما يلي:

$30 \times 75 = 2250$ دقيقة

ويساوي 37.5 ساعة

ولإنتاج .E يحسب كما يلي:

$96 \times 75 = 7200$ دقيقة

مشكلة رقم (1) **Problem no.(1)**

في ورش صناعية (III., II.,I.) يمكن أن يتم تصنيع خمسة من قطع الغيار المختلفة (E.,D.,C., B., A.)، كما هو وارد في الجدول التالي:

الورق الصناعية	الإنتاجية من قطع الغيار				
	A	B	C	D	E
I.	20	15	18	5	6
II.	22	20	10	5	3
III.	19	10	20	10	8
أقل عدد مممكن من قطع الغيار ينبغي إنتاجها	660	360	360	420	210
سعر قطع الغيار	20	15	18	70	110

حيث أن البيانات الواردة في الجدول تمثل:

1- إنتاجية كل واحدة من الورش الصناعية عند إنتاج كل واحدة من قطع الغيار في خلال وجبة عمل واحدة.
2- أقل عدد ممكن من قطع الغيار ينبغي إنتاجها.
3- سعر كل واحدة من قطع الغيار.

المطلوب:

ما هي خطة تخصيص عملية تصنيع قطع الغيار بين الورش الصناعية، بحيث يتم بموجبها تعظيم مقدار الإنتاج الشهري مع العلم أن الورش الصناعية تعمل وجبتي عمل (الشهر 23 يوم عمل)، هل أن كل ورش العمل سوف تعمل لكافة أيام الشهر.

النتائج النهائية

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 & 26 \\ 20 & 18 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 38 & 8 \end{bmatrix}$$

F (x) = 74260 دينار

مشكلة رقم (2) **Problem no.(2)**

ثلاثة أنوع من المخارط الميكانيكية (O_3, O_2, O_3) يمكن أن تستخدم لإنتاج أربعة أنواع من المنتجات (E_4, E_3, E_2, E_1) وقت العمل اللازم موضح بالجدول التالي:

المخارط الميكانيكية	وقت العمل/ بالدقائق			
	E_1	E_2	E_3	E_4
O_1	5	2	10	12
O_2	10	8	2	5
O_3	15	1	5	5

وقد علمت ما يلي:

1- الوقت المتاح بالنسبة لكل مخرطة هو:

$O_1 \Leftarrow$ 2500 دقيقة

$O_2 \Leftarrow$ 10000 دقيقة

$O_3 \Leftarrow$ 2400 دقيقة

2- المطلوب إنتاجه من كل منتوج هو:

$E_1 \Leftarrow$ 200 قطعة

$E_2 \Leftarrow$ 800 قطعة

$E_3 \Leftarrow$ 200 قطعة

$E_4 \Leftarrow$ 600 قطعة

المطلوب:

تخصيص وتوزيع المهام الإنتاجية بين المخارط الثلاث بحيث لا يتجاوز ذلك ما هو متوفر من وقت العمل للمكائن، مع تخصيص متطلبات خطة الإنتاج مع الأخذ بنظر الاعتبار تقليل وقت العمل إلى أدنى مستوى ممكن.

النتائج النهائية

$$X = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 & 600 \\ 0 & 800 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F(x) = 5200$$ دقيقة

مشكلة رقم (3) **Problem no.(3)**

في أحـد المعامـل الإنتاجيـة يمكـن أن يـتم تصـنيع ثلاثـة منتجـات W_1,W_2,W_3 وذلـك باستخدام ثلاثة مكائن O_1,O_2,O_3.

الجدول التالي يوضح استهلاك الوقت للمكائن الثلاث وذلك لكل وحدة واحـدة مـن الإنتاج وكذلك كلفة الوحدة الواحدة من المنتجات في ظل كل واحدة من المكائن مع سعر بيع الوحدة الواحدة من المنتجات الثلاث:

كلفة الوحدة الواحدة			استهلاك الوقت			المكائن
W_3	W_2	W_1	W_3	W_2	W_1	
13	24	21	16	8	12	O_1
11	27	20	15	10	14	O_2
14	26	19	18	12	15	O_3
17	32	25	**سعر المنتجات**			

المطلوب:

تخصيص عملية إنتاج المنتجات الثلاث على المكائن بحيث تكون الـربح مـن عمليـة البيع يكون أعلى ما يمكن وذلك على افتراض:

1- أن الوقت المتاح بالنسبة لأي ماكنة يبلغ 480 دقيقة.

2- إن كل واحدة من المنتجات يفترض إنتاجية بحدود 20 قطعة.

النتائج النهائية

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 60 & 0 \\ 0 & 18 & 20 \\ 20 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

F (x) = 900 دينار

مشكلة رقم (4) **Problem no.(4)**

في إحـدى المصـانع الإنتاجيـة يـتم طـرح ثلاثـة أنـواع مـن المنتجـات C,B,A وذلـك باسـتخدام ثلاثـة أنـواع مـن المـواد الأوليـة. إن اسـتهلاك هـذه المـواد الأوليـة محسـوباً بالكيلوغرام لكل 1000 قطعة إنتاج يتضح من خلال الجدول التالي:

المنتجات	المواد الأولية لكل 1000 قطعة		
	I	II	III
A	10	80	20
B	20	40	40
C	70	30	20

وقد علمت أن المطلوب هو إنتاج:

A ⇐ 200 ألف قطعة

B ⇐ 160 ألف قطعة

C ⇐ 210 ألف قطعة

وقد أشار المهندسين المسؤولين عن العملية الإنتاجية، إن هكذا خطة إنتـاج تسـتلزم توفير أو شراء

- على الأقل 2100 كغم من المادة الأولية .I
- على الأقل 2400 كغم من المادة الأولية .II

المطلوب:

تحديد خطة شراء المواد الأولية بحيث تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن علماً بأن سعر شراء المواد الأولية هو 6 , 8 ,11 على التوالي.

النتائج النهائية

$$X = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 5 & 60 & 95 \\ 0 & 0 & 210 \end{bmatrix}$$ F (x) = 119800 دينار

مشكلة رقم (5) **Problem no.(5)**

ثلاثة أنواع من المكائن قيم عليها صناعة أربعة أنواع من المنتجات.

الجدول التالي يتضمن بيانات تتعلق بمقدار استغلال الوقت لكل واحدة من المنتجات:

المكائن	المنتجات				المتوفر من المكائن
	I	II	III	IV	
A	25	15	16	20	10
B	30	10	24	25	8
C	24	18	25	27.5	15
المطلوب	220	90	146	220	

المطلوب:

بيان الكيفية التي بموجبها تتم عملية التخصيص بحيث تكون التكاليف اليومية لاستغلال المكائن هو أقل ما يمكن وقد علمت أن:

- تكاليف استخدام 1 ماكنة من النوع A ⇐ 190 دينار
- تكاليف استخدام 1 ماكنة من النوع B ⇐ 130 دينار
- تكاليف استخدام 1 ماكنة من النوع C ⇐ 280 دينار

إن نوع من المكائن لا يكون مستغل بالكامل.

النتائج النهائية

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$ $F(x) = 5740$ دينار

يبقى 5 مكائن من النوع C غير مستغلة

مشكلة رقم (6) **Problem no.(6)**

إحدى شركات النقل البري للمسافرين قامت بفتح أربعة ورشات لتصليح أسطولها في الباصات الذي يتكون أربعة ماركات من السيارات (فورد، فولكس واكن، تويوتا، فيات). الجدول التالي يتضمن بيانات تتعلق بالوقت اللازم للسيارات من النوع (j) في الورشة (i):

ورشة التصليح	Ford	Volkswagen	Toyota	Fiat
1	5	7	8	7
2	6	4	7	6
3	7	5	6	5
4	4	3	5	9

المطلوب:

تخصيص وقت ورش التصليح من أجل إنجاز عمليات التصليح وأن الوقت الكلي للتصليح يكون أقل ما يمكن.

النتائج النهائية

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

F (x) = 19 يوم

مشكلة رقم (7)   **Problem no.(7)**

مؤسسة إنتاجية يرتبط بها خمسة مصانع، كل واحدة من هذه المصانع يتولى عملية صناعة خمسة أنواع من المنتجات، إلا أن الاختلاف هنا هو كمية الإنتاج في وحـدة الـزمن في هذه المصانع مختلفة ويتضح ذلك من الجدول التالي:

المصانع	المنتجات				
	1	2	3	4	5
Z_1	4	3	7	12	3
Z_2	2	5	8	1	9
Z_3	6	4	8	8	6
Z_4	3	2	4	5	6
Z_5	7	9	3	2	5

المطلوب:

ولو أخذ بنظر الاعتبار أن كل واحد من هذه المصانع يمكن أن ينتج نوع واحـد مـن هذه المنتجات، ما هي خطة الإنتاج التي بموجبها يكون كمية الإنتاج أكبر ما يمكن

النتائج النهائية

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$F(x_1) = F(x_2) = 4100$ قطعة/ ساعة

مشكلة رقم (8) **Problem no.(8)**

إحدى المنشآت الإنشائية تقوم بطرح 5 أنواع من الكاشي الموازئيك وذلك في أربعة معامل، وأن كل واحد منها يمكن أن ينتج أي من هذه الأنواع من الكاشي، وبسبب عدم وجود عوامل إنتاج متشابهة (الحصول على المواد الأولية، المستوى التقني للمكائن، تنظيم العمل وغير ذلك) فإن تكاليف الإنتاج مختلفة كما هو واضح في الجدول التالي:

المعامل	Petna 1	Dziurawka2	kratowak3	scienne4	stropowe5
Z_1	300	320	340	1800	1000
Z_2	320	296	280	1600	1340
Z_3	336	244	316	1980	1160
Z_4	388	288	332	1960	840

وقد علمت أن:

السعر بالدينار ولكل 1000 قطعة وكما يلي:

كاشي رقم (1) ⇐ 400 دينار

كاشي رقم (2) ⇐ 320 دينار

كاشي رقم (3) ⇐ 360 دينار

كاشي رقم (4) ⇐ 2000 دينار

كاشي رقم (4) ⇐ 1200 دينار

ولو افترضنا أن كل واحد من المعامل يطرح نوع واحد من هذه المنتجات وأن كل ما ينتج يباع، فما هي خطة التخصيص التي تجعل الإيرادات أعلى ما يمكن.

النتائج النهائية

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

F (x) = 936 دينار

مشكلة رقم (9) **Problem no.(9)**

منشأة لديها ثلاثة أنواع من المكائن (III.,II., I.) يتم على هذه المكائن طرح أربعة أنواع من المنتجات (D,C,B,A) كمية الإنتاج لكل ماكنة وبالنسبة لكل منتج وكذلك كلفة الوحدة الواحدة من المنتجات على كل ماكنة موضحة في الجدول التالي:

المكائن	كمية الإنتاج			
	A	B	C	D
I	15	4	5	2
II	3	6	3	10
III	12	4	6	3

المكائن	تكاليف الإنتاج			
	A	B	C	D
I	80	60	10	40
II	20	30	50	40
III	30	20	6	10

وقد علمت ما يلي إن كل ماكنة تخصصت بنوع معين من المنتجات.

المطلوب: ما هي خطة تخصيص المنتجات على المكائن المتوفرة بحيث أن:

1- حجم الإنتاج الكلي يكون أعلى ما يمكن.

2- تدنية التكاليف الكلية للإنتاج.

النتائج النهائية

A.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

F(x) = 31 قطعة/ ساعة

b.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

F (x) = 40 قطعة ساعة

مشكلة رقم (10) Problem no.(10)

أربعة من العاملين الماهرين، يمكن أن ينتجوا أربعة منتجات w_1, w_2, w_3, w_4، الجدول التالي يتضمن مقدار ساعات العمل المصروفة من قبل هؤلاء العاملين لطرح هذه المنتجات.

العاملين	المنتجات			
	W_1	W_2	W_3	W_4
R_1	1	0.5	0.25	2
R_2	2	0.1	0.5	1
R_3	2	0.2	1	2
R_4	1	0.5	0.25	0.5

وإذا أخذنا بنظر الاعتبار أن كل عامل ممكن أن ينتج نوع واحد من هذه المنتجات، فما هي خطة التخصيص الأمثل على أساس ما يلي:

1- تدنية الأوقات المحسوبة بساعات العمل للعاملين.

2- تعظيم كمية المنتجات المتوقع الحصول عليها.



أسئلة وتمارين الفصل السابع

س1: ما هي الدالة التي يمكن أن تعتمد في النماذج الرياضية للتخصيص، أعطي مثال افتراضي لذلك.

س2: أربعة فنيين يمكن أن ينجزوا ثلاثة أنواع من الأعمال، وقد علمت ما يلي:

Cij = تكاليف 1 ساعة من عمل الفنيين (i) عند إنجازهم الأعمال (j)

Wij= مقدار العمل المنجز محسوب بالمتر المكعب (م3) من العمل (j) الذي ينجز من الفنيين (i) خلال 1 ساعة.

المطلوب: اكتب من خلال الصيغة الرياضية الدالة الهدف:

أ. تدنية التكاليف الكلية لعمل الفنيين:

ب. تعظيم العوائم المتوقعة من عمل الفنيين.

عرف متغيرات القرار في كل حالة.

س3: هل أن أي مشكلة تخصيص يمكن أن يتم حلها باعتماد الطريقة الهنكارية.

س4: ما هي التطبيقات المحتملة لهكذا نوع من الأساليب الكمية.

س5: ما هي علاقة نموذج التخصيص نموذج النقل؟

س6: ما هي علاقة نموذج التخصيص بنموذج البرمجة الخطية.

س7: هل يمكن أن تكون دالة الهدف في عملية التخصيص .Max كيف؟ وضح ذلك

س8: هل يمكن أن تكون مصفوفة معاملات دالة الهدف ليست متساوية من حيث عدد الصفوف وعدد الأعمدة؟ كيف.

س9: لماذا القيم الحرة في معظم نماذج التخصيص تساوي واحد فقط.

س10: ما هو المقصود بأن قيمة المتغير xj هي

$$X_j \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

وضح ذلك بشكل مفصل

المراجع العلمية للكتاب

أولاً: المراجع العربية

1- المشرقي، حسن علي "بحوث العمليات/ تحليل كمي في الإدارة" دار المسيرة 1999.

2- التميمي، حسين عبد اللـه "إدارة الإنتاج والعمليات/مدخل كمي" دار الفكر، الأردن-عمان 1997.

3- إبراهيم نائب، أنعام باقية "نظرية القرارات-نماذج وأساليب كمية محوسبة" دار وائل للنشر الأردن، عمان 2001.

4- الفضل، مؤيد عبد الحسين، الحديثي ، علي حسين "نمذجة القرارات الإدارية" دار اليازوري للنشر، الأردن-عمان 1999.

5- الفضل، مؤيد عبدالحسين "الأساليب الكمية في الإدارة" دار اليازوري للنشر، الأردن- عمان 2004.

6- الفضل، مؤيد عبد الحسين، بشر نجاح باقر "بحوث العمليات وتطبيقاتها في وظائف المنشأة" دار زهران/ الأردن-عمان، 1999.

7- الفضل، مؤيد عبد الحسين، حاكم محسن "إدارة الإنتاج والعمليات" دار زهران، الأردن-عمان، 2004.

8- الفضل، مؤيد عبد الحسين، شعبان، عبد الكريم هادي "ترشيد القرارات الإدارية-تحليل كمي" دار زهران/الأردن – عمان 2003.

9- الفضل، مؤيد عبد الحسين، الجياشي، علي عبدالرضا "الأساليب الكمية في التسويق" دار وائل للنشر" الأردن- عمان 2004.

10- العبيدي، د. محمود رضا، الفضل، مؤيد الحسين "بحوث العمليات في منظمات الأعمال" دار الوراق للنشر والتوزيع/ الأردن-عمان2004.

11- الحناوي، محمد صالح، ماضي، محمد توفيق "بحوث العمليات في تخطيط ورقابة الإنتاج" الدار الجامعية، الأردن-عمان، 2001.

12- النعيمي، محمد عبد العال وآخرون "مقدمة في بحوث العمليات" دار وائل للنشر/ الأردن-عمان 1999.

13- القاضي، زياد عبد الكريم "مقدمة في بحوث العمليات" دار المسيرة،الأردن-عمان 1998.

14- السامرائي، حسين لطيف "الأساليب الكمية في الإدارة" الأردن-عمان، 1998.

15- سالم، فؤاد الشيخ، حسن، فالح محمد "بحوث العمليات/ نظرية وتطبيق" دار مجدلاوي للنشر والتوزيع/ الأردن-عمان 1983.

16- جابر، عدنان شمخي، حسن، حنويه سلمان "مقدمة في بحوث العمليات" بيت الحكمة/ العراق-بغداد 1988.

17- حمدي طه، "مقدمة في بحوث العمليات" ترجمة أحمد حسين علي حسين/ الرياض-دار المريخ للنشر 1996.

18- محمدمحمد كعبور "أساسيات بحوث العمليات/ القاهرة-المكتبة الأكاديمية 1991.

19- العزاوي، علي عبد السلام "بحوث العمليات في مجالات الاستثمار والإنتاج والنقل والتخزين" مطبعة دار الشرق، القاهرة 1991.

20- زيارة، فريد فهمي "الإدارة-الأصول والمبادئ" مطبعة الشعب/ الأردن-إربد، 2001.

ثانياً: المراجع الأجنبية

(1) المراجع باللغة الإنكليزية

1- David. R. Anderson, An Introduction to Management Science, Ohio, South-Western, 2003.

2- Barry, render, Quantitative Analysis for Management, New jersey; Pearson Education, Iuc, 2003.

3- Lee. Sang, Micro Management Science, Wm . C. Brown Publishers, 1986.

4- Render B., Stair R.M. "Quantative Analysis for management" 7/e Perntice Hall, New York, 2000.

5- Thomas R. "Quantitative Methods for Business studies l/e, Prentice hall PTR 1997.

6- Anderson D.R., Sweeney D.J., William T.A. Introduction to Management with CD-Roum Ioe, Prentice Hall New York 2001.

7- Taha H.A. "Operations Research/An- Introduction" Prentice Hall, NewJersey, 1997.

8- Anderson D.R., Sweeney D.G. Williams T.A." Introduction to Management Science A Quantitative Approach to Decision Making with CD-Roum, 10e, New York 2001.

9- Evans J.R., Oison D.L. "Statistics, Data Analysis, and Decision Modeling" 1/e Prentice Hall, New Jersy 2000.

10- Krakjewski, y.lee, ritzman, P.Larry, "Operations Management Stratey and Analysis" 4th ed., Wesley Publishing company, New York 1996.

11- Wisniews K m. "Quantitative method for decision Maker "Prentice Hill, New York 2002.

12- Lawrence J.R., Pasternak B.A. "Integrated Approach for decision making- Applied Managemen Science "John Wiley of sons, Inc., NewYork, 1998.

13- Anthony M. Biggs N. "Mathematics for Economics and Finance: Methods and Modeling, Cambridge 1996.

14- Jeffery H.M., Larry R.W. "Decision modeling with Microsoft Excel, 6/6, Prentics Hall 2001.

15- Thomas R. "Quantitative Method for Business Studies l/e, prentice hall fir 1997.

16- L. LAPIN "Quantative Methods/For Business Decisions with Cases "HBJ, new York, 1995.

17- Wegner H. Principle of Operations Research with Applications to Management Science" 2nd Ed. Printice Hall 1975.

18- Taylor B., W. "Introduction to Management Science, 7/e, Printice Hall 10-13-033190-2,2001.

(2) المراجع باللغة البولندية

1- Kriniski A., Badach L. "Zastowaniania Matematika do podejmowania decezji ekonomicznych" PWE, W-Wa, 1985.

2- Zbigniew y., Karol K." Badania Operacyjne W Przykladach I Zadaniach" PWN, W-wa, 2001.

الاساليب الكميه

نماذج خطية وتطبيقاتها في تخطيط الإنتاج



د. مؤيد عبد الحسين الفضل

من مواليد 1953 النجف الأشرف / العراق

الشهادات العلمية:

- بكالوريوس محاسبة وادارة أعمال / جامعة بغداد 1976
- دبلوم عالي إدارة المصارف / جامعة بغداد 1979
- دبلوم لغة بولندية / أوج 1980
- ماجستير تحليل كمي/ جامعة بوزنان – بولندا 1982
- دكتوراة إدارة أعمال (بحوث العمليات) جامعة بوزنان – بولندا 1985

• حاصل على جائزة وزير التعليم العالي والبحث العلمي البولندية للإنجازات العلمية المتميزة.

• عمل في جامعة صلاح الدين وجامعة القادسية وجامعة الكوفة في العراق كعضو هيئة تدريسية ورئيس لقسم إدارة الأعمال. حالياً عضو هيئة تدريسية في جامعة جرش الأهلية في الأردن.

ناقش وأشرف على العديد من أطاريح الماجستير ورسائل الدكتوراة وقام بتدريس مادة بحوث العمليات والاساليب الكمية في مراحل الدراسات العليا والأولية لسنوات عديدة.

شارك في العديد من المؤتمرات العلمية التي عقدت في العراق وخارجه ولديه العديد من البحوث العلمية المنشورة في مجلات عراقية وعربية وعالمية.

اصدر العديد من الكتب في مجال المنهج الكمي لإدارة الأعمال.

وكتابي هذا يحتاج إليه كافة العاملين في مجال المنهج الكمي لإدارة الأعمال وكذلك كافة الطلبة والزملاء الأكاديميين العاملين في مجال علوم الرياضيات التطبيقية في كليات العلوم والتربية. يحتاج إليه أيضاً كل من يعمل في مجال وضع خطط الانتاج او ترشيدها في منظمات الأعمال الإنتاجية والخدمية. إن المادة العلمية الواردة في متن هذا الكتاب تمثل نقلة علمية متقدمه في مجال الأساليب الكمية في الإدارة، لذلك ننصح القارئ الكريم بأن يضيف هذا المؤلف إلى مكتبته العلمية.

والله من وراء القصد.

Beirut Telfax: 009611 272225
009613 334648 / 312124
Amman 009627 9 5698699



Dar Majdalawi Pub. & Dis.
Amman 11118 - Jordan
P.O.Box : 184257
Tel & Fax : 4611606 - 4622884



دار مجدلاوي للنشر والتوزيع
عمان – الرمز البريدي : ١١١١٨ – الاردن
ص.ب : ١٨٤٢٥٧ – تلفاكس : ٤٦١١٦٠٦ – ٤٦٢٢٨٨٤

www.majdalawibooks.com
e-mail: customer@majdalawibooks.com